بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّهُمَّ صَلِّ عَلی مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

هندسه (۲)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

پایهٔ یازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: هندسه(۲) ـ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۱۲۱۳

پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، ناصر بروجردیان، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
محمدحسن بیژن‌زاده، زهرا رحیمی، محمدرضا سیّدصالحی، هوشنگ شرقی و محمود نصیری (اعضای گروه تألیف) ـ محمد دانشگر (ویراستار)

مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ مجتبی زند (مدیر هنری، طراح جلد و صفحه‌آرا) ـ مریم دهقان‌زاده (رسام) ـ افسانه امیر احمدی، سیده‌فاطمه طباطبایی، سیف‌الله بیک‌محمد دلیوند، علی نجمی، کبری اجابتی (امور آماده‌سازی)

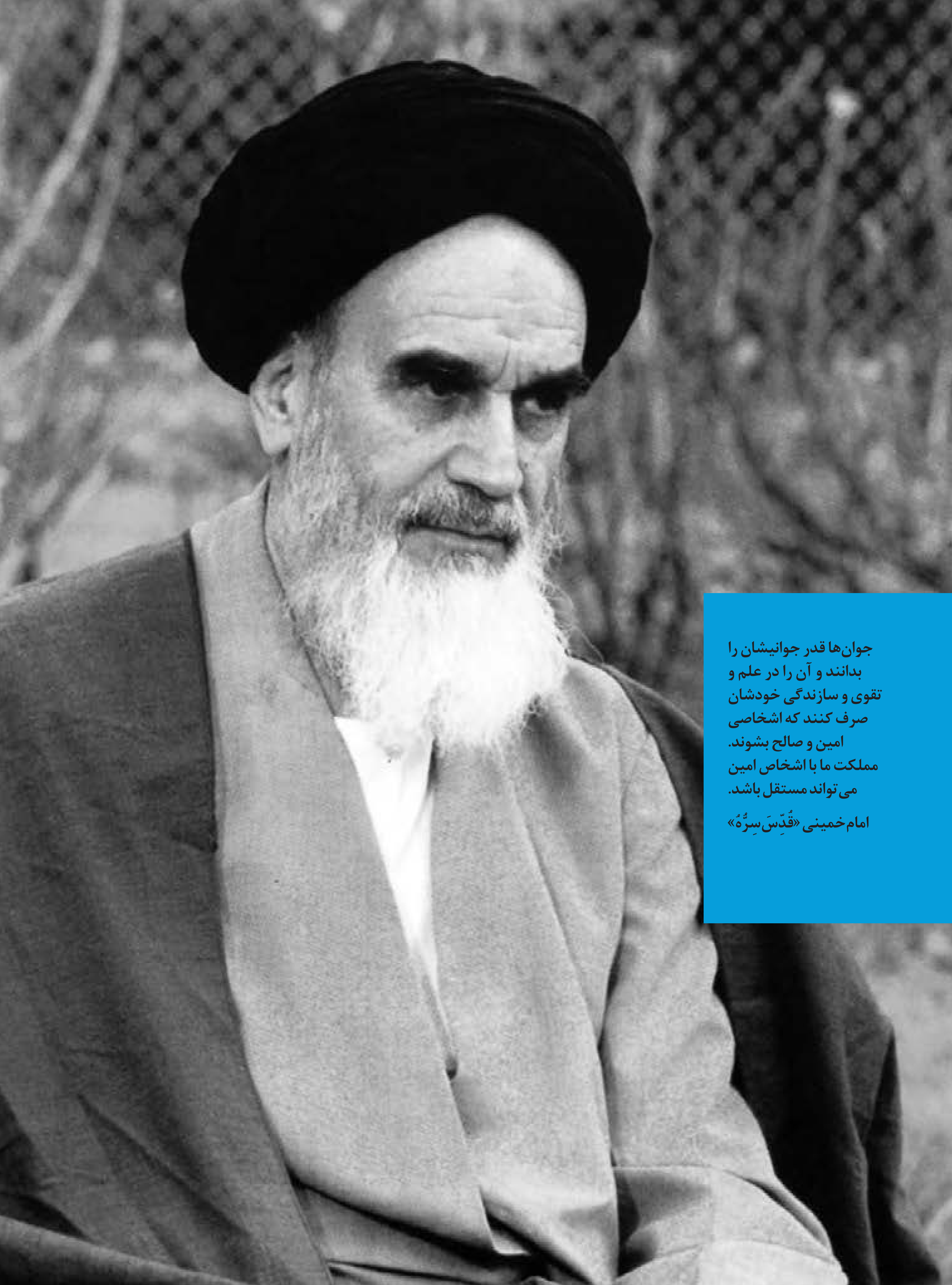
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ ششم ۱۴۰۱

شابک ۲ـ۲۷۸۳ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-2783-2



جوان‌ها قدر جوانیشان را
بدانند و آن را در علم و
تقوی و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی «قُدِّسَ سِرُّهُ»

فهرست

پیشگفتار

کتاب حاضر در راستای برنامهٔ درسی ملی و در ادامهٔ تغییر کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم متوسطه تألیف شده است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائهٔ مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به‌عهده دارد. با توجه به این که کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به‌وسیلهٔ معلم وجود دارد. در هر حال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد دربارهٔ یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که باید به این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی توجه شود. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این سال‌ها به‌صورت سنتی ارائه شده‌اند.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالا دستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفادهٔ افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیهٔ امکانات موجود نظیر سامانهٔ اعتبارسنجی، سایت گروه ریاضی دفتر تألیف، ایمیل، دعوت از دبیران مجرّب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب را نیز دبیران ریاضی استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال کرده‌اند. لازم است از زحمات تمامی عزیزان همراه تشکر و قدردانی شود.

اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پست الکترونیکی و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی[1] دارد. به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

مؤلفان

۱ــ mathrde@gmail.com
http: //math–dept.talif.sch.ir

فصل اوّل

دایــره

هندسه در ساخت استحکامات دفاعی، قلعه‌ها و برج و باروها از دیرباز کاربردهای بسیاری داشته است. یک قضیهٔ بنیادی در هندسه موسوم به «قضیهٔ هم‌پیرامونی» می‌گوید در بین همهٔ شکل‌های هندسی بسته با محیط ثابت دایره دارای بیشترین مساحت است. این موضوع در طراحی دایره‌ای شکل قلعه‌ها اهمیت بسیاری دارد. قلعهٔ فلک‌الافلاک (شاپور خواست) که از دورهٔ ساسانیان در شهرستان خرم‌آباد به‌جای مانده است نمونهٔ گویایی از همین کاربردهاست.

درس اوّل

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

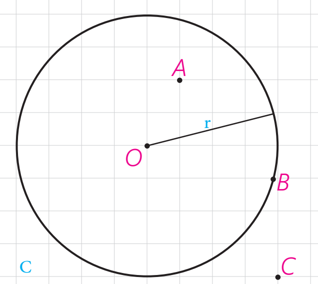
دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است که در پایه‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. در ادامه با استفاده از شکل دایره، برخی موارد یادآوری شده‌است که از قبل با آنها آشنایی دارید.

همان‌طور که می‌دانید تمام نقاطی که روی دایره واقع‌اند از مرکز دایره به یک فاصلهٔ ثابت (اندازهٔ شعاع دایره) هستند. معمولاً دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را به‌صورت C(O,r) نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دایره به سادگی می‌توان نشان داد که :

الف) اگر نقطه‌ای مانند B روی دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است.

ب) اگر نقطه‌ای مانند C بیرون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است.

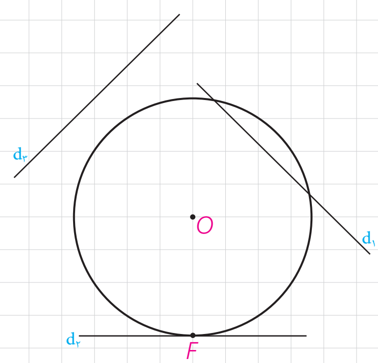
پ) اگر نقطه‌ای مانند A درون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است.



اوضاع نسبی خط و دایره

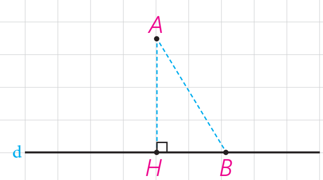
در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطهٔ اشتراک داشته، و یا هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.

در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر **دایره مماس** است و در حالتی که خط و دایره دو نقطهٔ اشتراک داشته باشند، خط و دایره را **متقاطع** می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره **قاطع** می‌نامیم.

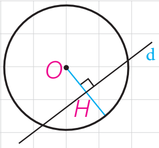


یادآوری

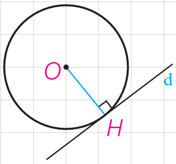
اگر خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر d داده شده، و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازهٔ پاره‌خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است و فاصلهٔ نقطهٔ A از دیگر نقاط خط d از این مقدار بزرگ‌تر است ($AB > AH$).



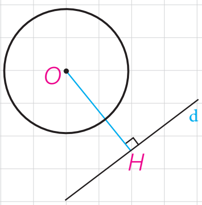
اگر d یک خط و C(O,r) یک دایره و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از نقطهٔ O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.



الف) اگر فاصلهٔ خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد $(OH < r)$، خط و دایره .... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند



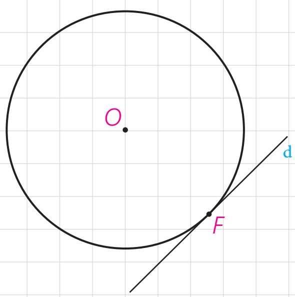
ب) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد $(OH = r)$، خط و دایره .... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی ....



پ) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد $(OH > r)$، خط و دایره ....

فعالیت

۱ــ فرض کنیم خط d بر دایرهٔ C در نقطهٔ F مماس است.

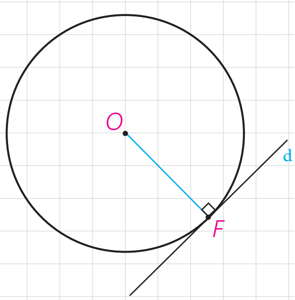


الف) نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d به نقطهٔ O کدام است؟ چرا؟

ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟

پ) نتیجه : اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطهٔ F ....

۲ــ خط d در نقطهٔ F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همهٔ نقاط خط d نسبت به دایرهٔ C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطهٔ تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

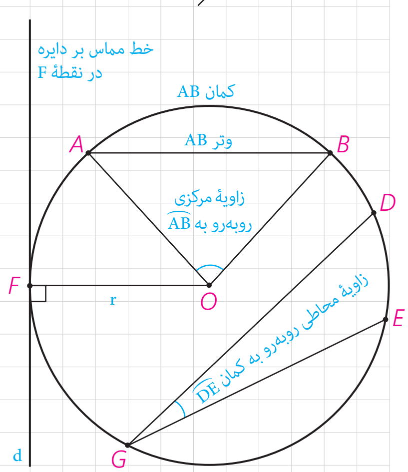


۳ــ با توجه به قسمت‌های ۱ و ۲ اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خطِ مماس بر دایره را در نقطهٔ F رسم کنید؟

بنابراین :

یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.

زوایای مرکزی، محاطی و ظلی



با تعاریف زوایای مرکزی و محاطی و کمان یک دایره در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید. در اینجا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم.

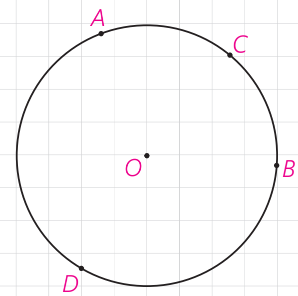
۱ــ **شعاع دایره** : پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

۲ــ **وتر دایره** : پاره‌خطی که دوسر آن روی دایره باشد.

۳ــ **قطر دایره** : وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.

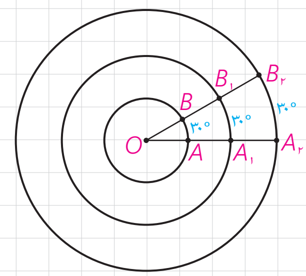
۴ــ **زاویهٔ مرکزی** : زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.

۵ــ **زاویهٔ محاطی** : زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.



۶ــ **کمان** : کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛ به این ترتیب هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آنها می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد؛ مثلاً در شکل مقابل نقاط A و B دو کمان $\overset{\frown}{ACB}$ و $\overset{\frown}{ADB}$ را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از $\overset{\frown}{AB}$ کمان کوچک‌ترِ مشخص شده توسط A و B است.

۷ــ **اندازهٔ کمان**، همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

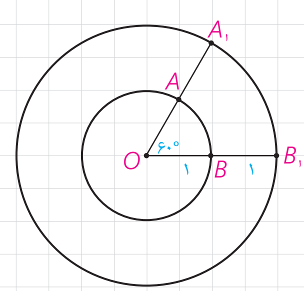


۸ــ با توجه به شکل به سادگی دیده می‌شود که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.

کار در کلاس

۱ــ با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازهٔ °۳۶۰ است، خواهیم داشت :

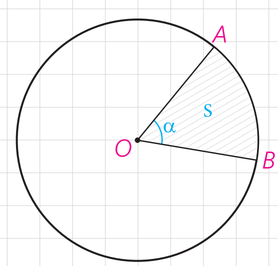
$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{۳۶۰}$$



۲ــ با توجه به شکل، اندازهٔ کمان‌های زیر را بنویسید.

طول $\overset{\frown}{AB}$ = ـــــ $\qquad$ $\overset{\frown}{AB}$ = ـــــ °

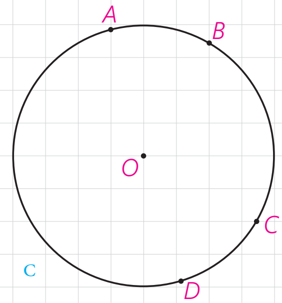
طول $\overset{\frown}{A_1B_1}$ = ـــــ $\qquad$ $\overset{\frown}{A_1B_1}$ = ـــــ °



۳ــ ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ C(O,R) برحسب درجه مساوی α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با : $L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با : $S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰}$

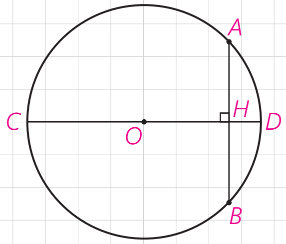
فعالیت

۱ــ فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایرهٔ $C(O,r)$ باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.



۲ــ فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.

۳ــ وتر AB و قطری از دایره، که بر وتر AB عمود است، مانند شکل مقابل داده شده‌است. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.



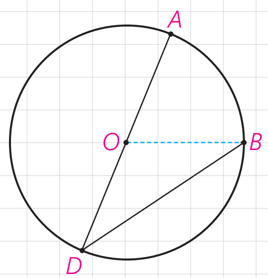
۴ــ این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

۵ــ حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

۶ــ اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

فعالیت

۱ــ در شکل مقابل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.

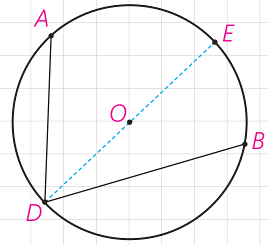


ــ اگر از B به O وصل کنیم، زاویهٔ AOB یک زاویهٔ خارجی برای مثلث OBD است.

بنابراین: $\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \dots = ۲\widehat{ODB}$ و از آن نتیجه می‌شود:

$$\widehat{ODB} = \frac{۱}{۲}\widehat{AOB} = \frac{۱}{۲}\widehat{\dots\dots}$$

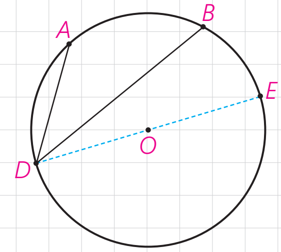
۲ــ در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.



ــ اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\cdots\cdots}\\[2ex] \widehat{EDB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\cdots\cdots}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\cdots\cdots}$$

۳ــ در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.



ــ اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم :

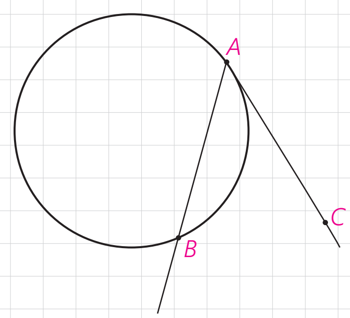
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\cdots\cdots}\\[2ex] \widehat{BDE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\cdots\cdots}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\cdots\cdots}$$

بنابراین :

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه.

زاویهٔ ظلی

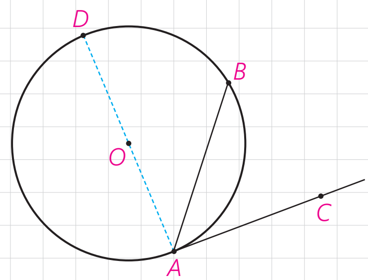
نوع دیگری از زاویه، که در دایره مطرح است، زاویهٔ ظلی است. زاویهٔ ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره وضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد. در شکل مقابل $B\hat{A}C$ یک زاویهٔ ظلی است.



فعالیت

۱ــ زاویهٔ ظلی $\widehat{CAB}$ را درنظر بگیرید و قطری از دایره را رسم کنید که شامل نقطهٔ A هست.

الف) $\widehat{DAC} = \cdots\cdots^\circ$ و بنابراین : $\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\cdots\cdots}$



ب) زاویهٔ DAB یک زاویهٔ محاطی است.

بنابراین : $\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\cdots\cdots}$

پ) از (الف) و (ب) داریم : $\overset{\frown}{DAC} - \overset{\frown}{DAB} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\cdots\cdots} - \overset{\frown}{\cdots\cdots})$

و بنابراین $\overset{\frown}{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\cdots\cdots}$

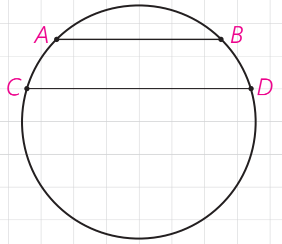
ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.

بنابراین :

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با .... کمان روبه‌رو به آن زاویه.

کار در کلاس

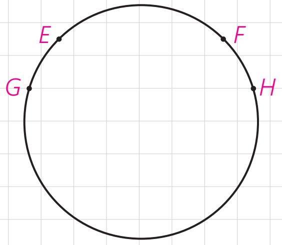
۱ــ در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.



الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ب) کمان‌های $\overset{\frown}{BD}$ و $\overset{\frown}{AC}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۲ــ در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم‌اندازه‌اند.



الف) وترهای EF و GH و پاره‌خط EH را رسم کنید.

ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

پ) وترهای EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

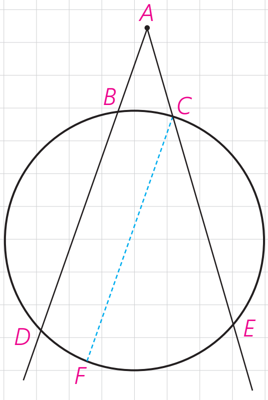
نتیجه

دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد.

تاکنون زاویه‌هایی را بررسی کردیم که رأس آنها روی دایره باشد و رابطهٔ اندازه این زاویه‌ها را با اندازهٔ کمان‌های ایجاد شده توسط آنها مشخص کردیم. حال به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی می‌پردازیم که رأس آنها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند.

فعالیت

۱ــ فرض کنید رأس زاویهٔ DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده، و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویهٔ موردنظر مشخص شده باشد.

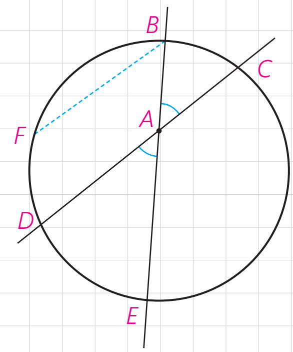


الف) از نقطهٔ C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\overset{\frown}{DAE} = \overset{\frown}{FCE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{FE} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{DF}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC})$$

ب) از C به D وصل کنید و به کمک زاویه خارجی در مثلث ACD رابطهٔ فوق را اثبات کنید.

۲ــ رأس زاویهٔ DAE مانند شکل در درون دایره است و اضلاع این زاویه کمان‌های BC و DE را مشخص کرده‌اند.



الف) از نقطهٔ B خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

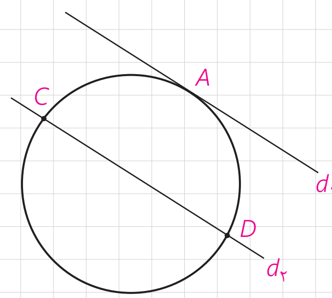
$$\overset{\frown}{DAE}=\overset{\frown}{FBE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FE}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{FD}+\overset{\frown}{DE})=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE})$$

ب) از B به D وصل کنید و به کمک زاویه خارجی مثلث ABD رابطهٔ فوق را اثبات کنید.

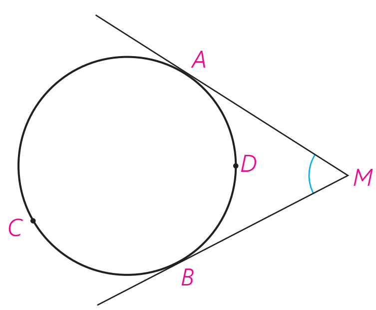
تمرین

۱ــ در شکل‌های زیر ثابت کنید :

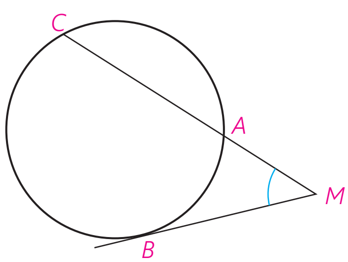
راهنمایی: از نقطهٔ B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.



الف) $d_۱ \parallel d_۲$، ثابت کنید $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$

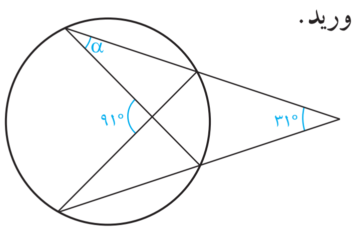


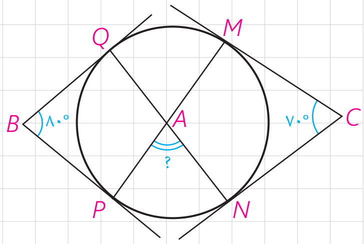
ب) $\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ADB}}{۲}$



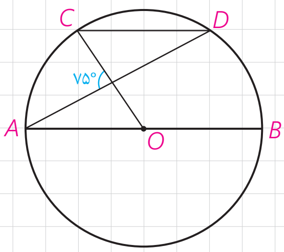
پ) $\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$

۲ــ در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

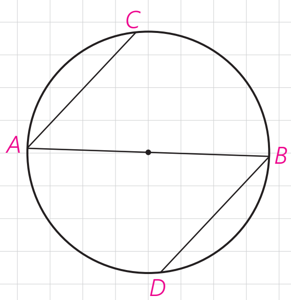




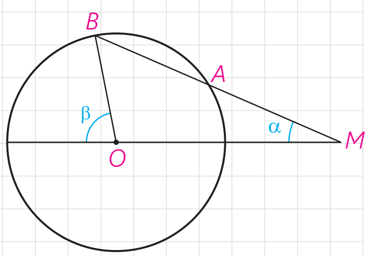
۳ــ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟



۴ــ در دایره رسم شده شکل مقابل، $CD \parallel AB$، اندازه کمان CD را به‌دست آورید.

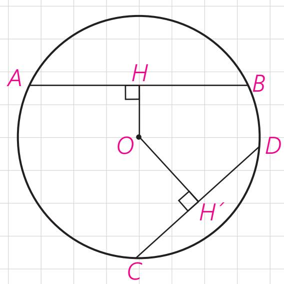


۵ــ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.
ثابت کنید: $AC = BD$



۶ــ دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و $MA = R$؛ نشان دهید: $\beta = ۳\alpha$

۷ــ در دایرهٔ $C(O,R)$، $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$ فاصلهٔ O از وتر AB را به دست آورید.



۸ــ در دایرهٔ $C(O,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$ (OH و OH' فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند.)

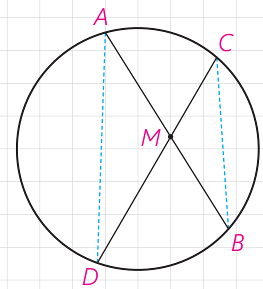
راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کنید.

درس دوم

رابطه‌های طولی در دایره

اگر خط‌های شامل دو وتر از یک دایره، یکدیگر را در درون یا بیرون دایره قطع کنند بین اندازهٔ پاره‌خط‌های حاصل روابطی داریم که به بررسی آنها می‌پردازیم.

فعالیت

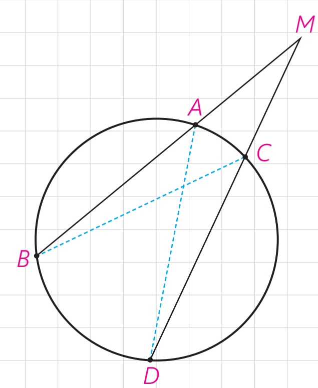


۱ـ دو وتر AB و CD در نقطهٔ M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC متشابه‌اند.

ب) با توجه به تشابه این دو مثلث داریم : $\frac{AM}{CM}=\frac{DM}{.......}$

۱ و در نتیجه: $AM. ... = CM. ...$



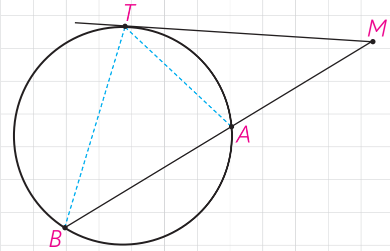
۲ـ خط‌های شامل دو وتر AB و CD در نقطهٔ M در خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) نقطهٔ A را به D و نقطهٔ C را به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MCB باهم متشابه‌اند.

ب) با توجه به این تشابه داریم : $\frac{MA}{MC}=\frac{MD}{.......}$

۲ و در نتیجه: $MA. ... = MC. ...$

قضیه: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند. آن‌گاه: $MA.MB = MC.MD$



۳ـ فرض کنیم از نقطهٔ M (خارج دایره) مانند شکل یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم.

الف) T را به A و B وصل، و مشخص کنید چرا؟ $\widehat{MTA}=\widehat{TBM}$

ب) علت تشابه دو مثلث MAT و MTB را مشخص، و با توجه به این تشابه رابطهٔ زیر را کامل کنید.

$$\frac{MA}{MT} = \frac{MT}{.......}$$

و در نتیجه : $MT^۲ = ...$

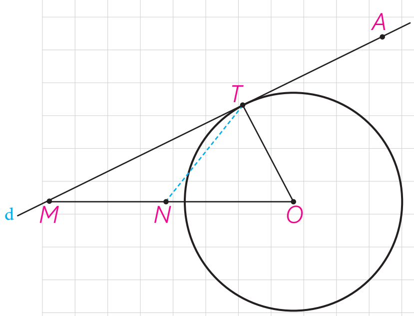
بنابراین قضیهٔ زیر را داریم :

قضیه: هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازهٔ مماس برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ قاطع

یعنی طول مماس واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ قاطع است.

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

اگر خط d در نقطهٔ T بر دایره مماس باشد و A و M دو نقطه بر خط d در دوطرف نقطهٔ T باشد، هرکدام از پاره‌خط‌های MT و AT بر دایره مماس‌اند.



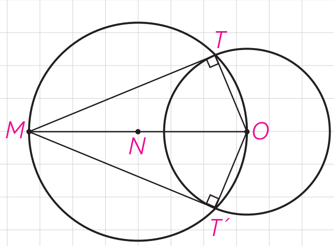
اگر O مرکز دایره باشد، ΔOMT دررأس T قائم‌الزاویه است؛ چرا؟

اگر N وسط پاره‌خط OM باشد، NM = NO = NT؛ چرا؟

بنابراین دایره به مرکز Nو قطر OM از نقطه T می‌گذرد.

از این ویژگی می‌توانیم در رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره بر آن استفاده کنیم.

پس برای رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره، ابتدا دایره‌ای به قطر OM (O مرکز دایره) رسم می‌کنیم.



این دایره، دایره مفروض را در دو نقطه T و T′ قطع می‌کند. خط‌های MT و MT′ بر دایره مماس‌اند؛ چرا؟

کار در کلاس

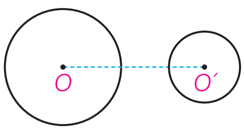
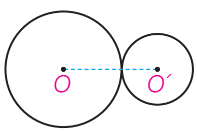
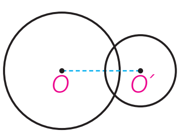
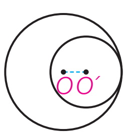
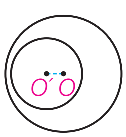
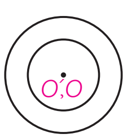
هرگاه از نقطه M خارج دایره C(O,R) دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T′ نقاط تماس باشند، ثابت کنید :

الف) اندازه‌های دو مماس برابرند.

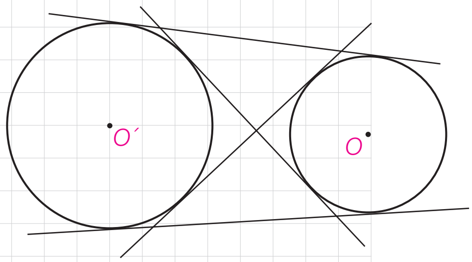
ب) نیم‌خط MO نیمساز زاویه TMT′ است.

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایره C(O,R) و C′(O′,R′) را با فرض R > R′ و OO′= d درنظر می گیریم.
حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به‌صورت زیر است :

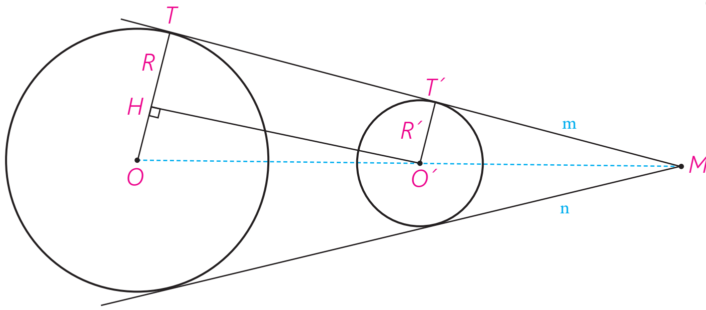
دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d = ۰$	

هر خطی یا پاره‌خطی که بر هردو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره است. اگر دو دایره در یک طرفِ خط باشند، آن را مماس مشترک خارجی، و اگر دو دایره در دو طرف خط باشند آن را مماس مشترک داخلی می‌نامند.



فعالیت

۱ــ فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T' بر دو دایره مماس است و شعاع‌های OT و $O'T'$ رسم شده‌است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر d باشد؛ از O' خطی موازی خط m رسم می‌کنیم تا شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع کند.



الف) $TT'O'H$ مستطیل است؛ چرا؟

ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$، تساوی زیر را توجیه کنید.

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}}$$

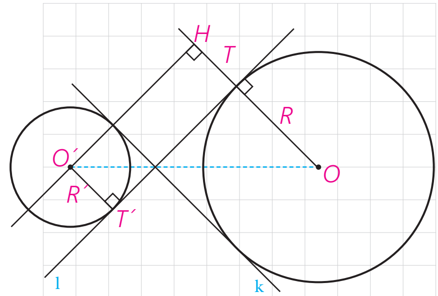
پ) با توجه به کار در کلاس قبل بگویید چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع باشند، نقطهٔ تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

ت) به مرکز O و به شعاع $R-R'$ دایره‌ای رسم کنید. پاره‌خط $O'H$ برای دایرهٔ رسم شده چگونه خطی است؟

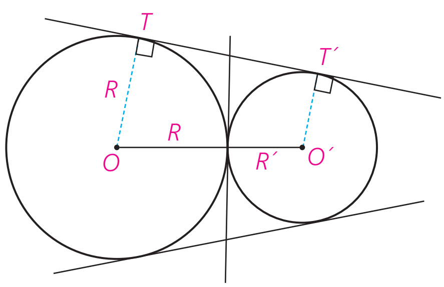
ث) فرض کنید دو دایره داده شده، و رسم مماس مشترک خواسته شده باشد. از آنجا که مرکزها و شعاع‌های دو دایره معلوم است، می‌توان دایرهٔ مطرح شده در قسمت (ت) را رسم کرد و سپس مماس $O'H$ را بر آن رسم کرد؛ در این‌صورت چگونه می‌توانید مماس TT' را رسم کنید؟

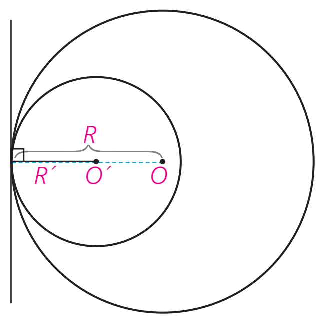
۲ــ دو مماس مشترک داخلی l و k بر دو دایره متخارج مطابق شکل رسم شده است. با به‌کار بردن قضیه فیثاغورس در $\Delta O'OH$ نشان دهید[۱]:

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}}$$



۳ــ دو دایره مماس. دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می‌نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره در دوطرف این مماس باشند، آن دو دایره، مماس برونی است و اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می‌نامند.





مماس خارج‌اند؛
سه مماس مشترک دارند.
$OO' = R + R'$

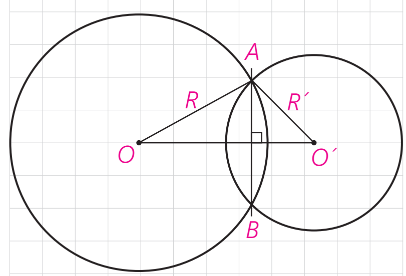
مماس داخل‌اند؛
فقط یک مماس مشترک دارند.
$OO' = |R - R'|$

با استفاده از دستور محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره مماس خارج، $TT' = ۲\sqrt{RR'}$

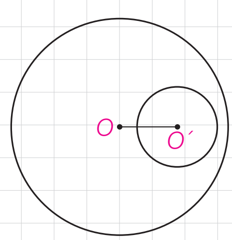
۴ــ دو دایره متقاطع. دو دایره را که دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می‌نامند. در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند.

و $|R - R'| < OO' < R + R'$ ؛ چرا؟

پاره‌خط AB، که دوسر آن روی هر دو دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع است. چرا پاره‌خط OO' عمودمنصف وتر مشترک AB است؟



۵ ــ دو دایره متداخل. دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می‌نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها $OO' < |R - R'|$

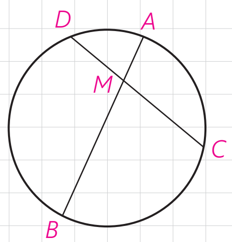


$OO' < |R - R'|$

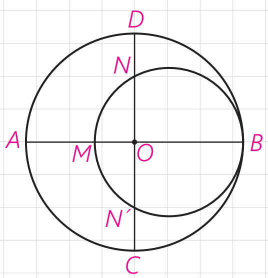
۱ــ رسم مماس مشترک داخلی دو دایره از اهداف این کتاب نیست.

تمرین

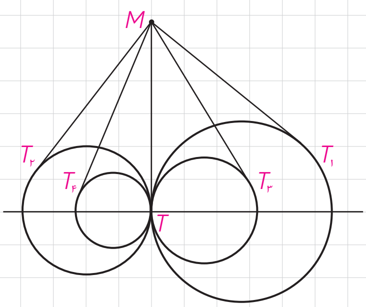
۱ــ در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = ۱۱cm$، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



۲ــ از نقطهٔ P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و $BC = ۲۰$. طول‌های PB و PC را به‌دست آورید.



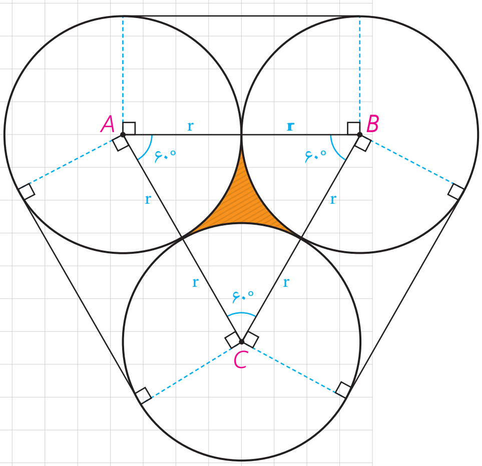
۳ــ در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر برهم عمودند. اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



۴ــ مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید

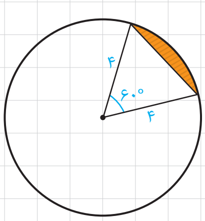
$MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴ = \ldots$

۵ــ طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به‌دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.



۶ــ سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیلهٔ نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $۶r + ۲\pi r$ است.
همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^۲(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$ است.

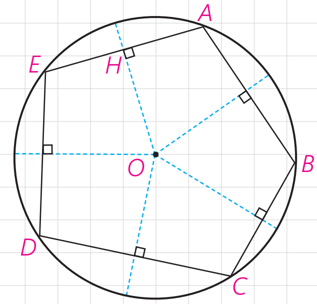
۷ــ طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آنها ۱۶π سانتی‌مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.



۸ــ مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

درس سوم

چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

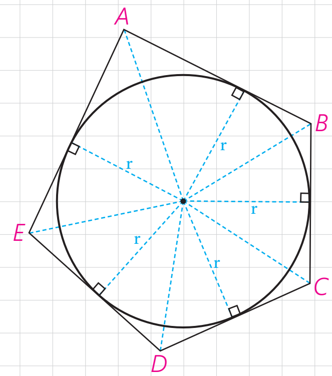


چند ضلعی را **محاطی** می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد؛ در این صورت دایره را **دایرهٔ محیطی آن چند ضلعی** می‌نامیم.

به‌طور مثال ABCDE یک پنج ضلعی محاطی است.

می‌دانیم برای اینکه دایره‌ای از دو نقطه بگذرد، باید مرکز آن روی عمود منصف پاره‌خطی باشد که آن دو نقطه دو سر آن است؛ بنابراین :

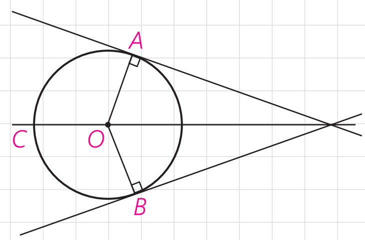
> یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه همرس باشند.



این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است. چرا؟

چند ضلعی را **محیطی** می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را **دایرهٔ محاطی این چند ضلعی** می‌نامیم.

فعالیت



فرض کنید دایرهٔ C بر دو ضلع زاویه‌ای مانند شکل مماس باشد.

الف)

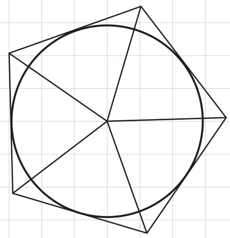
۱ــ پاره خط‌هایی که مرکز دایره را به نقاط تماس اضلاع با دایره وصل می‌کند، رسم کنید و آنها را OB و OA بنامید.

۲ــ پاره خط‌های OA و OB برای دایره چه نوع پاره خطی هستند؟

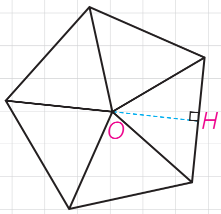
۳ــ فاصلهٔ نقطهٔ O (مرکز دایره) تا ضلع‌های زاویه مفروض با طول پاره خط‌های رسم شده (OA و OB) چه رابطه‌ای دارد؟

۴ــ با توجه به (۲) و (۳) فاصلهٔ مرکز دایره از دو ضلع زاویه .... و بنابراین نقطهٔ O روی ....

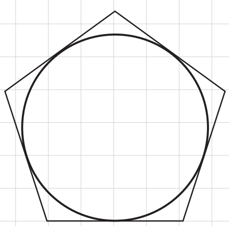
۵ــ فرض کنید مانند شکل مقابل، دایره در یک چند ضلعی محاط شده باشد. چرا مرکز دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی چند ضلعی است؟



ب) فرض کنید یک چند ضلعی مانند شکل مقابل به گونه‌ای باشد که نیمسازهای زوایای داخلی آن در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده باشند و OH پاره خط عمود به یک ضلع چند ضلعی باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH برای چند ضلعی مفروض چه نوع دایره‌ای است؟ چرا؟



بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند.این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.



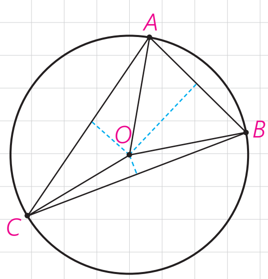
کاردرکلاس

اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایره محاطی برابر r باشد، نشان دهید S=rp .

راهنمایی: کافی است مساحت n مثلث را محاسبه، و با هم جمع کنید.

دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

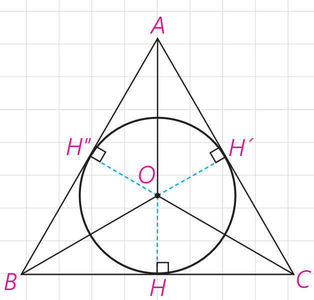
قبلاً همرسی سه عمود منصف یک مثلث را ثابت کرده‌ایم؛ بنابراین نقطه همرسی سه عمود منصف مثلث، تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد؛ یعنی دایره محیطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محاطی است.



$OA=OB=OC=R$

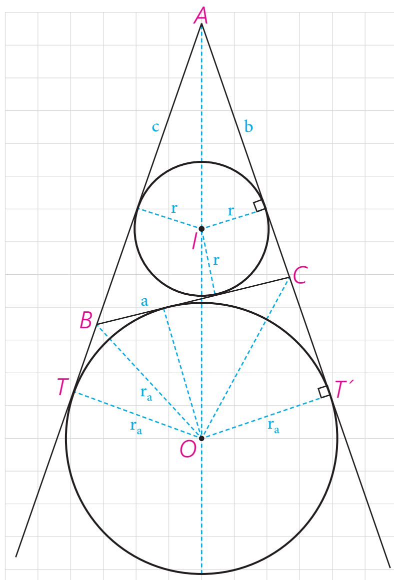
همچنین ثابت کرده‌ایم سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث همرس‌اند. در نتیجه مثلث، محیطی نیز هست. بنابر ویژگی نیمساز، این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه همرسی سه نیمساز است و شعاع این دایره، که آن را با r نشان می‌دهیم، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است. بنابر آنچه در مورد n ضلعی‌های محیطی نشان دادیم در مثلث نیز S=pr که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.

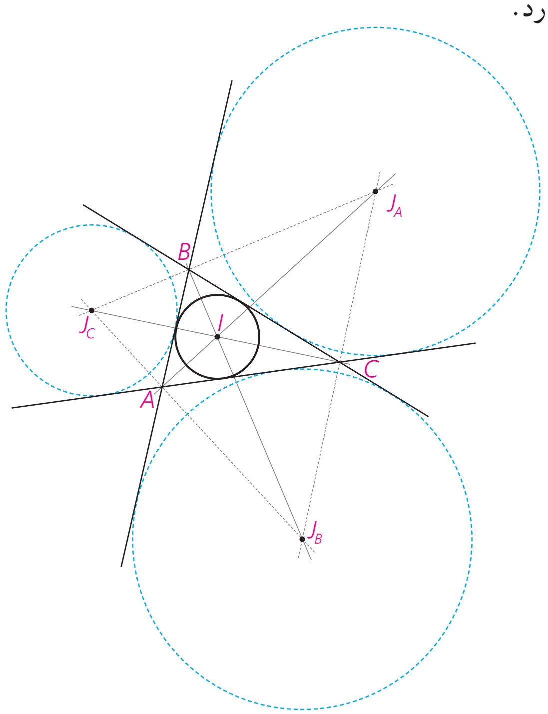


$OH=OH'=OH''=r$

اگر نیمساز زاویه A از ΔABC را رسم کنیم، نیمساز زاویه خارجی C را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند. این نقطه از خط BC و خط‌های ACو AB به یک فاصله است؛ چرا؟ بنابراین O نیز مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و خط‌های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامند.



شعاع این دایره را با r_a نشان می‌دهند؛ به همین ترتیب دو دایره محاطی خارجی دیگر نظیر دو رأس B و C وجود دارد.



اکنون در فعالیت زیر محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی را بررسی می‌کنیم.

فعالیت

در شکل داریم: $S(ABC)=S(OAC)+S(OAB)-S(OBC)$ اگر مساحت ΔABC را به S نشان دهیم، $S=\frac{۱}{۲}r_a(\cdots+\cdots-\cdots)$. اگر محیط مثلث را با ۲p نشان دهیم، داریم، ۲p=a+b+c؛ پس ...... = ۲p−۲a؛ در نتیجه $S= r_a(P-a)$ و بنابراین $r_a=\frac{S}{p-a}$ به طور مشابه برای اضلاع دیگر داریم:

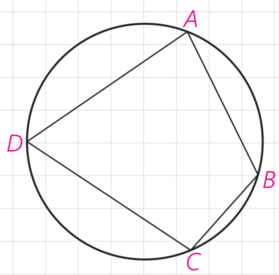
r_c=......

r_b=......

برخلاف مثلث، همهٔ چند ضلعی‌های دیگر، لزوماً محاطی یا محیطی نیستند. در بخش بعد به شرایط محاطی یا محیطی بودن یک چهار ضلعی می‌پردازیم.

چهار ضلعی‌های محاطی و محیطی

قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.



اثبات

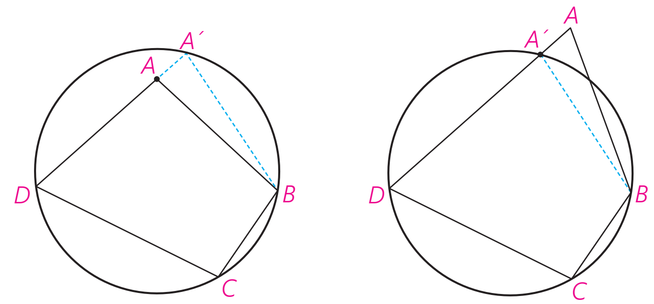
۱ــ فرض کنیم چهار ضلعی ABCD محاطی باشد؛ مجموع اندازه‌های $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ نصف مجموع اندازه‌های کمان‌های DCB و DAB است؛ اما مجموع اندازه‌های این دو کمان ...... است و در نتیجه مجموع اندازه‌های $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ برابر .... است.

به همین ترتیب $\widehat{B}$, $\widehat{D}$ مکمل‌اند.

۲ــ فرض کنیم $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ مکمل باشند. با برهان خلف ثابت می‌کنیم چهارضلعی ABCD محاطی است. از سه نقطه C،B و D همواره یک دایره می‌گذرد؛ چرا؟

اگر این دایره از A نگذرد، خط AD را در نقطه‌ای دیگری مانند A' قطع می‌کند که A' بین A و D یا A بین A' و D است. اکنون چهارضلعی $A'BCD$ ...... است؛ پس $\widehat{C}$ و $\widehat{BA'D}$ مکمل‌اند؛ در نتیجه باید $\widehat{A}$ و $\widehat{BA'D}$ هم‌اندازه باشند و این ممکن نیست؛ چرا؟

در نتیجه A' همان A است.



قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.

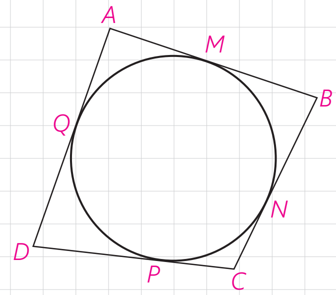
اساس اثبات بر این است که اگر از نقطه‌ای بیرون دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم دو پاره خط مماس هم‌اندازه‌اند.

اثبات

۱ــ اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد،

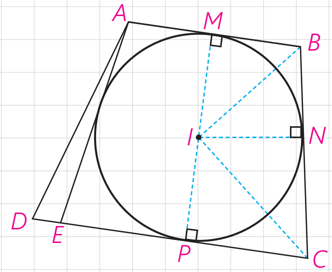
AB+CD=AM+...+PC+...=AQ+...+CN+...=AD+BC

عکس این قضیه نیز با برهان خلف ثابت می‌شود.



۲ــ فرض کنید : AB+CD=BC+AD.

نیمسازهای دو زاویهٔ B و C همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند. با توجه به ویژگی نیمساز، چرا نقطهٔ I از سه ضلع CD و BC و AB به یک فاصله است؟(IM=IN=IP) چرا دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM بر AB و BC و CD مماس است؟ حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد، حکم ثابت شده است.



اما اگر این دایره بر AD مماس نباشد از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند؛ در این صورت E بین P و D یا D بین E و P واقع می‌شود. پس، AB+EC=AE+BC ؛ (چرا؟) از این رابطه با استفاده از رابطه فرض چگونه نتیجه می‌گیرید : AD=DE+AE ؟

این رابطه امکان ندارد؛ (چرا؟) پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

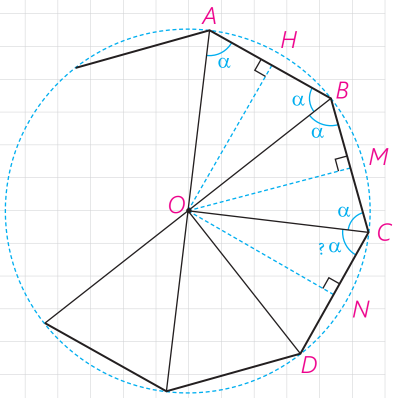
	مربع	مستطیل	لوزی	متوازی‌الاضلاع	ذوزنقه	ذوزنقه متساوی‌الساقین	کایت
محاطی	✓	...	...	...	...	...	...
محیطی	✓	...	...	...	...	...	...

از دیگر چندضلعی‌های محاطی و محیطی، چند ضلعی‌های منتظم است.

یک چند ضلعی محدب را منتظم می‌نامند، هرگاه تمام ضلع‌های آن هم‌اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم‌اندازه باشند.

مثلث متساوی‌الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.

در فعالیت زیر نشان می‌دهیم هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است :



فعالیت

فرض کنید اندازه هر زاویه n ضلعی منتظم ...ABCD، 2α باشد؛ عمود منصف‌های دو ضلع AB و BC را رسم می‌کنیم. فرض کنیم در O متقاطع‌اند. بنابراین $OA=\cdots\cdots=OC$.

پس $\Delta OAB \cong \Delta OBC$ چرا؟ $\widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=\alpha$

اکنون از D به O وصل می‌کنیم. چرا اندازه $\widehat{OCD}$ برابر α است؟ چرا $\Delta OCD \cong \Delta OCB$؟ و $OA=OB=OC=OD$؟

با ادامه این روند داریم :

$OA=OB=OC=OD=\cdots\cdots$ و $OH=ON=OM=\cdots\cdots$ بنابراین، O از همه رأس‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که از تمام رأس‌های n ضلعی منتظم می‌گذرد.

به همین ترتیب O از تمام ضلع‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که بر تمام ضلع‌های n ضلعی منتظم مماس است.

تمرین

۱ــ ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

۲ــ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

۳ــ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۴ــ یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

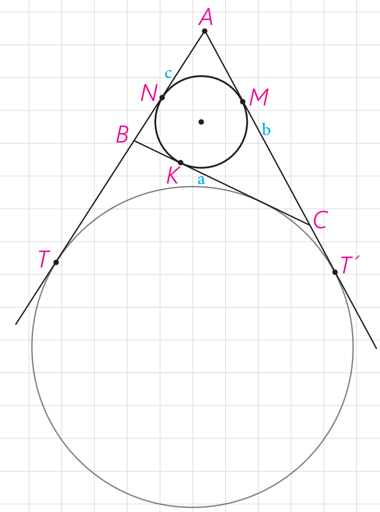
۵ــ اگر r_a , r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a،h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

۶ــ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن N، M و K باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید :

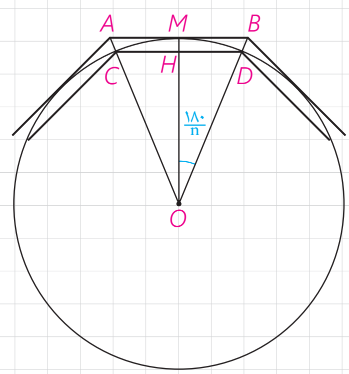


$AM=AN=P-a$

$BN=BK=P-b, CM=CK=P-c$

$AT=AT'=P$

۷ــ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB=۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و $CD=۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$.

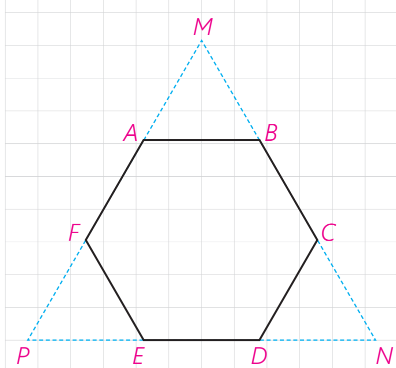


۸ــ شش‌ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی. مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

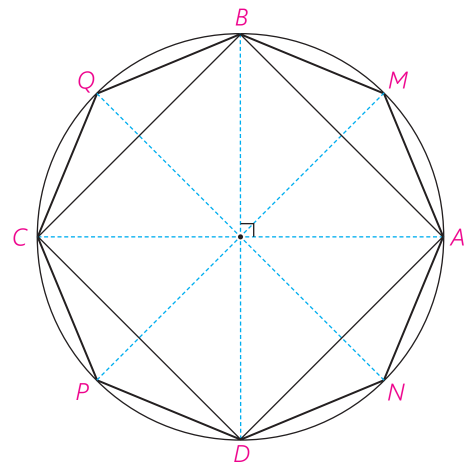
پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسهٔ پایهٔ ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟



ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC ،TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید :

$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$$

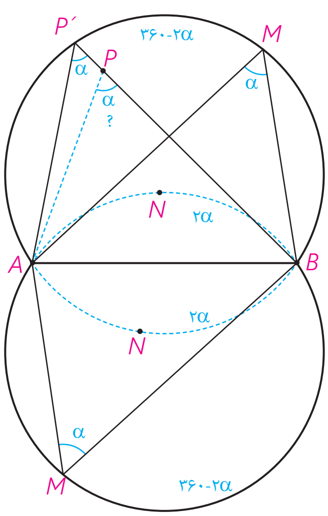
۹ــ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.



مجله ریاضی (خوانـدنـی)

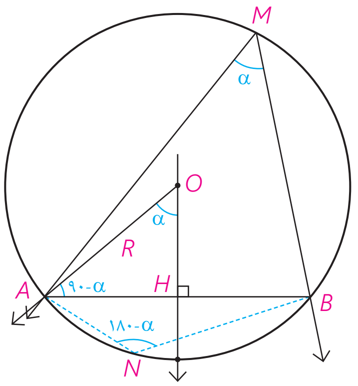
زاویه‌های دید و کمان شامل (حاوی)

پاره خط AB و نقطه M غیر واقع بر خط AB در یک صفحه مفروض‌اند. فرض کنیم اندازه $\overset{\frown}{AMB}$ برابر α باشد، دایره محیطی مثلث AMB را رسم می‌کنیم. اگر از هر نقطه روی کمان AMB به جز A و B به A و B وصل کنیم، اندازه زاویه پدید آمده برابر α است؛ چرا؟ به عکس اگر $\overset{\frown}{APB}$ هر زاویه‌ای به اندازه α باشد، آن‌گاه P روی کمان AMB واقع است؛ زیرا اگر P روی کمان AMB واقع نباشد، خط PB دایره را در نقطه‌ای مانند P′ قطع می‌کند؛ پس اندازه $\overset{\frown}{AP'B}$ برابر α است؛ اما این امکان ندارد (چرا؟). بنابراین :



مجموعه نقاطی از صفحه، که از آن نقاط پاره خط AB به زاویه با اندازه α دیده می‌شود، دو کمان هم‌اندازه از دو دایره قابل انطباق است، به جز نقاط انتهایی کمان‌ها؛ این کمان‌ها را کمان‌های حاوی زاویه α وابسته به پاره خط AB می‌نامند.

نشان دهید کمان‌های $\overset{\frown}{ANB}$ به جز A و B در این دو دایره، کمان‌های حاوی زاویه به اندازه α ــ ۱۸۰ است؛ یعنی مجموعه نقاطی که از آنها پاره خط AB به زاویه α ــ ۱۸۰ دیده می‌شود.
اگر α =۹۰°، این کمان‌ها چگونه‌اند؟



اگر از مرکز دایره شامل کمان حاوی به A و B وصل کنیم و عمود منصف پاره خط AB را نیز رسم کنیم، اندازه زاویه AOH برابر α یا α ــ ۱۸۰ است؛ چرا؟ در نتیجه اندازه $\widehat{OAB}$ برابر α ــ ۹۰ یا ۹۰ــ α (α منفرجه باشد).

با استفاده از این مفهوم و عمود منصف یک پاره خط، روش رسم دایره‌های شامل کمان حاوی را بیان کنید.

اگر شعاع کمان حاوی α برابر R و اندازه پاره خط AB برابر α باشد، نشان دهید : $\sin\alpha = \frac{a}{۲R}$ یا $a = ۲R\sin\alpha$.

۲

فصل دوم

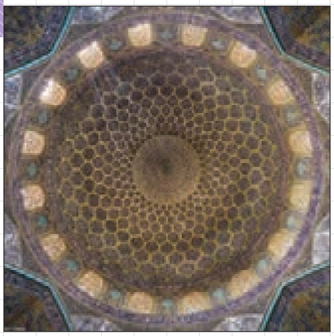
تبدیل‌های هندسی و کاربردها

عکس: محمدرضا دومیری گنجی

تبدیل‌های هندسی با بسیاری از مفاهیم هندسی از جمله هم‌نهشتی ارتباط نزدیکی دارند. همچنین کاربردهای فراوانی در صنعت، معماری و هنر دارند. خلق بناهای تاریخی که از دستاوردهای با ارزش بشر به شمار می‌آید، بدون به کارگیری تبدیل‌های هندسی میسر نمی‌شد. عمارت مسجد نصیرالملک در شیراز نمونه‌ای زیبا از این مطلب است.

درس اوّل

تبدیل‌های هندسی



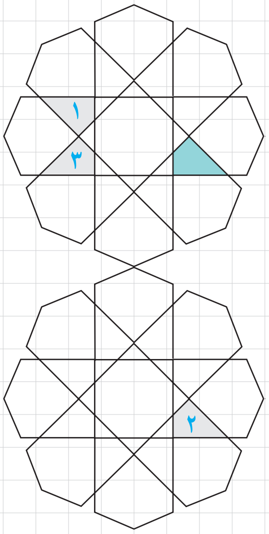
در زندگی روزمره و بسیاری از پدیده‌های اطرافمان نظیر طراحی پارچه، نقش فرش، کاشی‌کاری، گچ‌بری و... شکل‌های مختلف، طبق الگویی خاص تکرار می‌شود. در این فصل وضعیت‌های مختلفی را که هر شکل مشخص در اثر حرکت مجموعه نقاط در صفحه پیدا می‌کند، مطالعه و بررسی خواهیم کرد.

این حرکت‌ها می‌تواند دارای ویژگی‌های خاص قابل تعریف باشد؛ حرکاتی که سال‌های قبل با نمونه‌هایی از آن آشنا شده‌اید و با توجه به نوع این ویژگی‌ها، آنها را انتقال، بازتاب (تقارن محوری) یا دوران نامیده‌اید. انتقال، بازتاب و دوران را **تبدیل‌های هندسی** می‌نامیم.

> تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب می‌توانند **موقعیت**[۱] (جایگاه شکل در صفحه) یا **اندازهٔ**[۲] **شکل** را تغییر دهد.
> تبدیل‌یافتهٔ یک شکل را، **تصویر** آن می‌نامیم.

در سال‌های گذشته با مفاهیم بازتاب، انتقال و دوران تا حدودی آشنا شدید. در این فعالیت، این تبدیل‌ها و برخی ویژگی‌های آنها را **به‌طور شهودی** مرور و یادآوری خواهیم کرد.

فعالیت



۱ــ به تصویر روبه‌رو دقت کنید.

اگر چهارضلعی‌های ۱، ۲ و ۳ را تبدیل یافتهٔ چهارضلعی رنگ شده بدانیم :

الف) کدام چهار ضلعی، انتقال‌یافتهٔ چهارضلعی رنگ‌شده است؟

ب) کدام چهارضلعی بازتاب چهارضلعی رنگ‌شده است؟

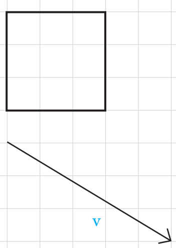
پ) کدام شکل، دوران یافتهٔ شکل رنگ‌شده است؟

۱ــ Position

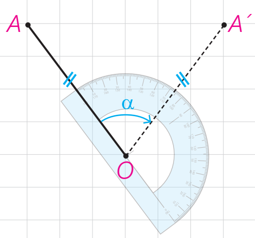
۲ــ Size

۲ــ الف) بازتاب شکل روبه‌رو را نسبت به خط d رسم کنید.
(توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید. در این حالت خط d نسبت به پاره خطی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، چه وضعیتی دارد؟)

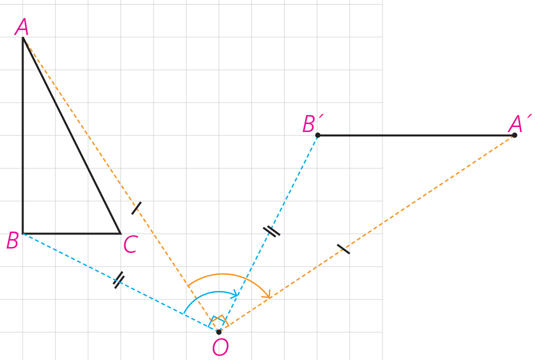
ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را تغییر می‌دهد؟
اندازه‌ها را چطور؟
پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟
ت) آیا حالتی وجود دارد که بازتاب، شیب خط را حفظ کند؟



۳ــ الف) تصویر شکل روبه‌رو را تحت انتقال با بردار v رسم کنید (توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید).
در این حالت پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند، نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟
ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟
اندازه‌ها را چطور؟
پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره خط متناظر در تصویر آن برابر است؟
ت) آیا با انجام این تبدیل اندازهٔ زاویه‌ها ثابت می‌ماند؟



۴ــ در سال‌های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازهٔ زاویهٔ α، کافی‌است هر نقطه از شکل، مثل نقطهٔ A را به مرکز دوران یعنی O وصل کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم، و روی ضلع دیگر این زاویه پاره‌خطی به اندازهٔ OA جدا کنیم تا نقطهٔ A' به دست آید.



می‌خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O، ۹۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم؛ به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B را دوران داده‌ایم.
الف) به همین ترتیب تصویر نقطهٔ C را پیدا، و شکل را کامل کنید.
ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟
اندازه‌ها را چطور؟
پ) آیا در این تبدیل، همواره شیب پاره‌خط اولیه با شیب پاره‌خط تصویر آن برابر است؟
ت) آیا می‌توانید زاویهٔ دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را حفظ کند؟

به طور شهودی می‌توان دید که بازتاب، انتقال و دوران، می‌توانند موقعیت شکل را تغییر دهند ولی اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهند.

در ادامهٔ این فصل با تبدیلی آشنا خواهید شد که در آن اندازهٔ زاویه‌ها حفظ می‌شود ولی برخلاف سه تبدیل صفحهٔ قبل، اندازهٔ پاره‌خط‌ها می‌تواند تغییر کند. این تبدیل را **تجانس** می‌نامیم.

حال که به‌طور شهودی، برخی ویژگی‌های تبدیل‌های مختلف را مرور کردیم در ادامه با دقت بیشتری به تعریف تبدیل، معرفی، ویژگی‌ها و کاربردهای آن خواهیم پرداخت.

تعریف: تبدیل T[1] در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از همان صفحه نظیر می‌کند و برعکس؛ هر نقطهٔ A' از صفحهٔ P، تصویر دقیقاً یک نقطهٔ A از همان صفحه است.

اگر تبدیل را با حرف T نمایش دهیم به اختصار چنین می‌نویسیم:

$T: P \longrightarrow P$

$T(A)=A'$

پیش از این **به طور شهودی** دریافتیم که بازتاب، انتقال و دوران طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند؛ یعنی اندازهٔ پاره‌خطی مثل AB در شکل اولیه با اندازهٔ پاره خط $A'B'$ در تصویر آن برابر است. این ویژگی را اصطلاحاً **طولپایی** یا **ایزومتری** می‌نامیم.

تعریف: تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتری) نامیده می‌شوند.

به عبارتی اگر داشته باشیم: $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$، آن‌گاه داریم: $AB=A'B'$

پیش از این به‌طور شهودی پذیرفتیم که در تبدیل‌هایی که مرور شد، اندازه زاویه حفظ می‌شود. در این فعالیت برای تبدیلات طولپا این ادعا را اثبات می‌کنیم و در ادامه طولپا بودن بازتاب، انتقال و دوران را به‌طور دقیق‌تر مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولپا اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

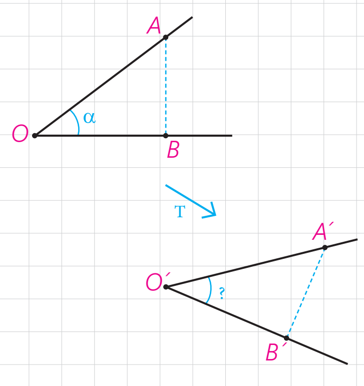
فرض کنید T تبدیلی طولپاست.

و داریم :

$T(A)=A'$

$T(B)=B'$

و $T(O)=O'$



[1] _ Transformation

دلیل همنهشتی دو مثلث OAB و $O'A'B'$ را بنویسید و از آنجا برابری زاویه‌های AOB و $A'O'B'$ را نتیجه بگیرید.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت :

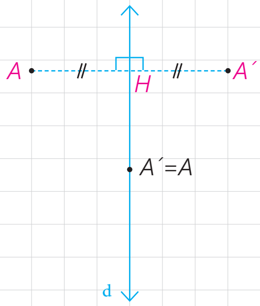
قضیه: در هر تبدیل طولپا، تبدیل‌یافتهٔ هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازهٔ آن است.

در تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب، می‌توان ثابت کرد که تبدیل‌یافتهٔ هر خط، یک خط است. بنابراین برای پیدا کردن تبدیل‌یافتهٔ یک خط، کافی است تبدیل‌یافتهٔ دو نقطهٔ دلخواه از آن را پیدا و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم. این مطلب برای یک پاره‌خط هم صادق است. کافی است تبدیل‌یافتهٔ دو نقطهٔ ابتدا و انتهای پاره‌خط را به‌دست آوریم و به هم وصل کنیم[1].

حال با استدلال دقیق‌تری بازتاب، انتقال، دوران و تجانس را بررسی خواهیم کرد.

بازتاب

همان‌طور که پیش از این اشاره شد برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا A' به دست آید.



در این صورت A' را بازتاب یا قرینهٔ A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم :

$S(A) = A'$

در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA' خواهد بود.

خط d، **خط بازتاب** یا **محور بازتاب** نامیده می‌شود.

۱ــ اثبات این مطلب که تبدیل یافته یک خط (یک پاره‌خط)، یک خط (یک پاره‌خط) است، جزء اهداف درسی این کتاب نیست و برای نشان دادن این مطلب، استناد به همین کادر کافی است.

اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است.

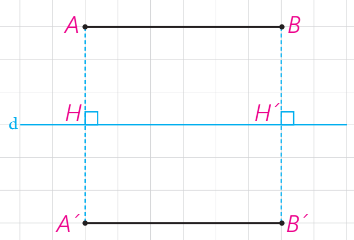
تعریف: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل‌یافتهٔ آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطهٔ ثابت تبدیل می‌نامند.

بنابراین بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

فعالیت

می‌خواهیم با استدلال دقیق‌تری نشان دهیم بازتاب، تبدیلی طولپا است. حالت‌های مختلف یک پاره‌خط را نسبت به خط بازتاب d در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم که اندازهٔ پاره‌خط با اندازهٔ تصویر آن برابر است.

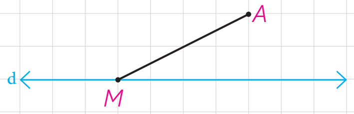
الف) ابتدا مسئله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که AB با خط d موازی است. بازتاب A و B را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را A' و B' می‌نامیم.



چهارضلعی $ABA'B'$ چه چهارضلعی است؟ چرا؟

طول پاره‌خط‌های AB و $A'B'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

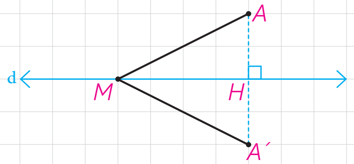
ب) حال فرض می‌کنیم که فقط یکی از نقاط انتهایی پاره‌خط داده شده روی خط بازتاب باشد.



(اگر هر دو نقطهٔ ابتدا و انتهای پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد، اثبات بدیهی است؛ چرا؟)

بازتاب A نسبت به خط d، نقطهٔ A' و بازتاب M، خود M است.

به عبارتی : $S(A) = A'$ و $S(M) = M$



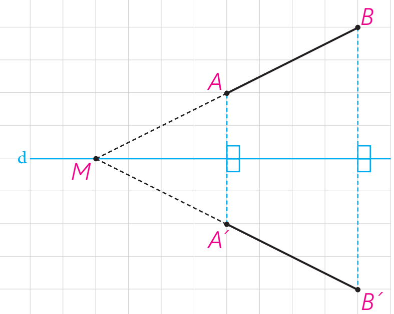
آیا می‌توانید به کمک هم نهشتی مثلث‌ها، دلیلی برای تساوی $MA=MA'$ ارائه کنید؟

آیا می‌توانید این تساوی را به روش دیگری نشان دهید؟ (از خاصیت عمود منصف یک پاره خط کمک بگیرید.)

پ) در حالتی که پاره‌خط AB با خط بازتاب d، نه موازی و نه متقاطع باشد، پاره‌خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در نقطهٔ M قطع کند.

نقطه B' بازتاب نقطه B را نسبت به خط بازتاب پیدا، و پاره‌خط MB' را رسم می‌کنیم.

ادعا می‌کنیم که تصویر نقطه A نیز روی خط MB' واقع می‌شود؛ چرا؟

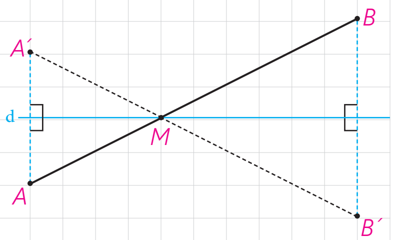


حال داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AB = MB - \cdots\cdots \\ A'B' = \cdots\cdots - \cdots\cdots \\ MA = \cdots\cdot \text{ و } MB = \cdots\cdot \text{ با توجه به قسمت ب} \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots = \cdots\cdots$$

ت) در حالتی که پاره‌خط AB خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع کند، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را نقطه A' می‌نامیم.

پاره‌خط MA' را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که بازتاب نقطه B یعنی نقطه B' هم بر امتداد MA' واقع است؛ چرا؟



حال داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AM + \cdots\cdots \\ A'B' = \cdots\cdots + \cdots\cdots \\ AM = \cdots\cdot \text{ و } MB = \cdots\cdot \text{ با توجه به قسمت ب} \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots = \cdots\cdots$$

تذکر: حالتی که پاره‌خط AB بر خط بازتاب عمود است، به‌عنوان تمرین به شما واگذار شده است.

نتیجهٔ این مراحل را می‌توان در قالب این قضیه بیان کرد :

قضیه: در هر بازتاب، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که بازتاب، تبدیلی طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ داریم : $AB = A'B'$

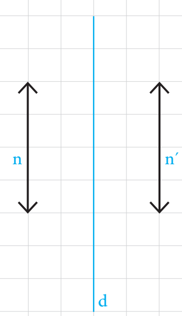
فعالیت

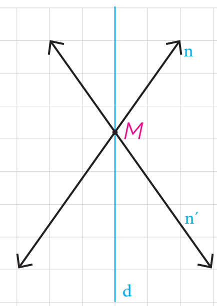
می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بازتاب، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

مسئله را برای سه حالت کلی در نظر می‌گیریم : وقتی خط داده شده با خط بازتاب موازی باشد، وقتی عمود باشد و وقتی نه عمود باشد و نه موازی.

الف) اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد، تصویر آن را تحت بازتاب، خط n' می‌نامیم. خطوط n و n' نسبت به هم چه وضعی دارند؟ چرا؟

آیا در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ می‌کند؟





ب) اگر خط n بر خط بازتاب d عمود باشد، تصویر آن تحت بازتاب چگونه خواهد بود؟ آیا در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ می‌کند؟

پ) اگر خط n با خط بازتاب d عمود و موازی نباشد، خط‌های d، n و n′ در نقطه‌ای مثل M متقاطع می‌شوند؛ پس n و n′ موازی نیستند و در این حالت بازتاب، شیب خط را .... بنابراین؛

در حالت کلی، بازتاب شیب خط را ....

دیدیم که طولپاها اندازهٔ زاویه را هم حفظ می‌کنند. بنابراین به‌طور کلی هر چندضلعی و تصویر آن تحت تأثیر یک طولپا از جمله بازتاب با هم همنهشت هستند.

کار در کلاس

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید :

الف) وقتی A' بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A' نسبت به خط d، کدام نقطه است؟ .... چرا؟

ب) قرینهٔ قرینهٔ هر نقطه چیست؟ ....

در واقع : $S(S(A))= S(......) = ...$ و به زبان ساده‌تر $(A')'=......$

پ) در هر بازتاب تبدیل یافتهٔ یک مثلث، یک .... است که با مثلث اولیه .... است.

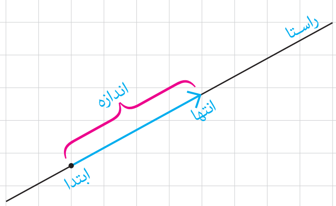
ت) در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب .... باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.

ث) در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافتهٔ تمام نقاط روی خط، .... است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب .... است.

در ادامه به کمک ویژگی‌های انتقال و دوران ثابت می‌کنیم که این دو تبدیل نیز طولپا هستند.

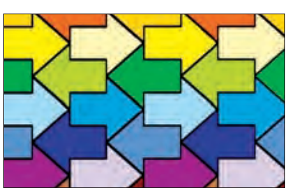
انتقال

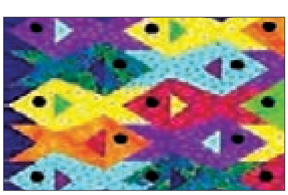
یادآوری



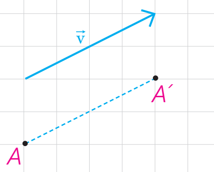
۱ــ در شکل مقابل یک بردار، ابتدا، انتها، اندازه و راستای آن مشخص شده است.

۲ــ دو بردار، که هم‌اندازه، هم راستا و هم‌جهت باشند، دو بردار برابر هستند.





در سال‌های گذشته دیدید که برای انتقال دادن یک شکل، کافی است تصویر هر نقطه از شکل را به کمک بردار انتقال پیدا کنیم؛ یعنی اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A باشد، آن‌گاه $\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$

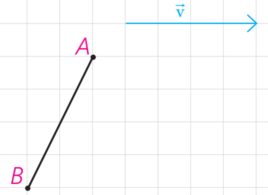


تعریف: انتقال[1] T تحت بردار $\vec{v}$، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$

فعالیت

۱ــ می‌خواهیم نشان دهیم انتقال، تبدیل طولپاست.

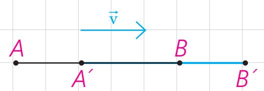
الف) اگر پاره‌خط دلخواه AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد، تبدیل یافتهٔ AB را با بردار $\vec{v}$ رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید و نشان دهید : $AB=A'B'$.



راهنمایی: می‌دانیم که اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

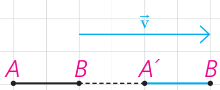
ب) اگر پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره‌خط‌ها در هر دو حالت زیر نشان دهید : $AB=A'B'$.

(۱)



$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' + \cdots\cdots \\ A'B' = \cdots\cdots + \cdots\cdots \\ AA' = \cdots\cdots \ \text{طبق تعریف انتقال} \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots = \cdots\cdots$$

(۲)



$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' - \cdots\cdots \\ A'B' = \cdots\cdots - \cdots\cdots \\ AA' = \cdots\cdots \ \text{طبق تعریف انتقال} \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots = \cdots\cdots$$

تذکر: در حالتی که طول بردار v با پاره‌خط AB برابر است به کمک هر یک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نشان داد.

بنابراین :

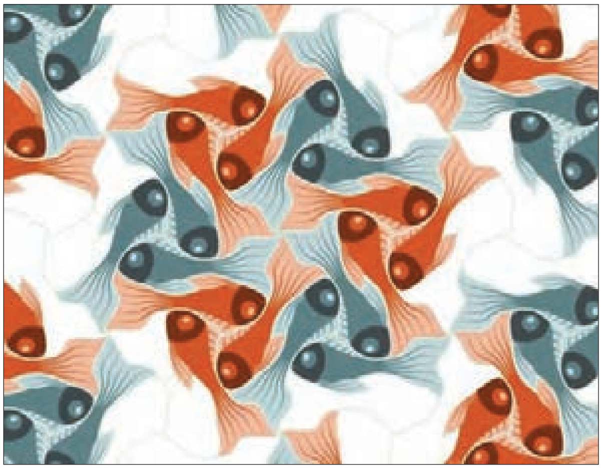
قضیه: در هر انتقال، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن با هم برابرند.

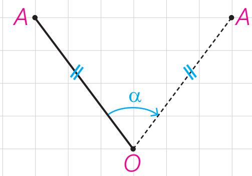
به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که انتقال، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحهٔ P که $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ داریم : $AB=A'B'$

۲ــ در هر یک از حالت‌های قبل نشان دهید انتقال، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

۱ــ Translation

دوران





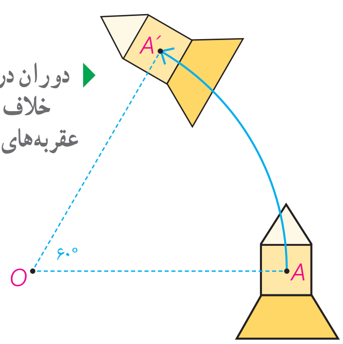
دیدیم که برای دوران دادن شکل به مرکز دوران O و به اندازهٔ زاویهٔ α، هر نقطه از شکل، مثل A را به مرکز دوران یعنی O وصل می‌کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم کرده، و روی ضلع دیگر این زاویه، پاره‌خطی به اندازهٔ OA جدا می‌کنیم تا A' به دست آید.

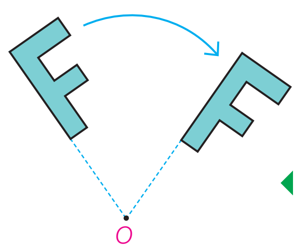
بدین ترتیب :

تعریف: دوران R[1] به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطهٔ A باشد، داریم:

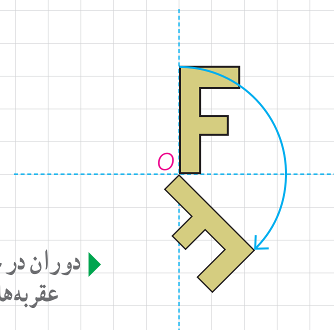
$OA = OA'$ و $\widehat{AOA'} = \alpha$

دوران در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت





دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت



فعالیت

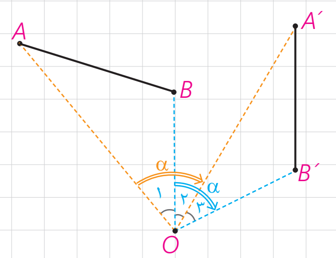
می‌خواهیم نشان دهیم دوران، تبدیلی طولپاست.

برای دوران دادن هر پاره‌خط نظیر AB کافی است نقاط A و B را دوران دهیم تا نقاط A' و B' حاصل شود و پاره خط $A'B'$ را رسم کنیم.

۱ــ Rotation

مسئله را برای حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم :

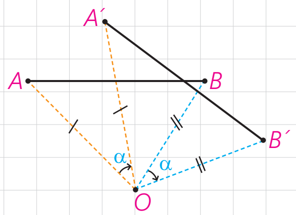
الف) مرکز دوران O بر پاره‌خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویهٔ دوران از زاویهٔ $\widehat{AOB}$ بیشتر باشد.



با توجه به شکل $O_1+\ldots=O_3+\ldots=\alpha$

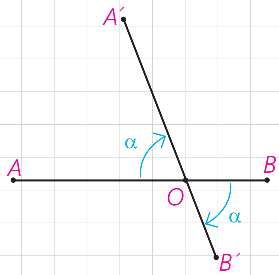
پس می‌توان مدعی شد که .... = ...

به کمک همنهشتی دو مثلث OAB و $OA'B'$ نشان دهید AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.



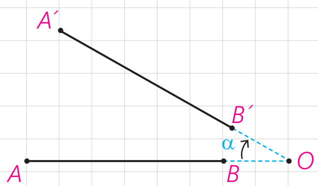
ب) به طور مشابه نشان دهید که اگر O بر پاره‌خط AB واقع نباشد ولی زاویهٔ دوران از زاویهٔ $\widehat{AOB}$ کمتر باشد، باز هم تساوی $AB=A'B'$ برقرار است.

تذکر: در حالتی که $\widehat{AOB}$ با زاویه دوران α برابر است با هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نمایش داد.



پ) اگر نقطهٔ O روی پاره خط AB باشد :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AO + \ldots \\ A'B' = \ldots + \ldots \\ AO = \ldots \;\text{و}\; OB = \ldots \;\; \text{طبق تعریف دوران} \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots = \ldots$$



ت) به طریق مشابه نشان دهید اگر نقطهٔ O روی امتداد پارخط AB باشد، حکم برقرار است.

بنابراین :

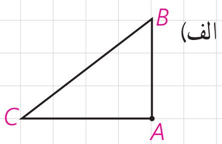
قضیه: در هر دوران، اندازهٔ هر پاره‌خط و تصویر آن با هم برابرند.

به‌عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که دوران، تبدیلی طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $R(A)=A'$ و $R(B)=B'$ داریم : $AB=A'B'$

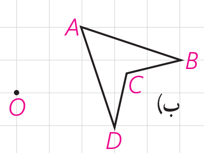
کاردرکلاس

دوران یافتهٔ هر شکل را رسم کنید.

الف) دوران به مرکز A و با زاویه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت



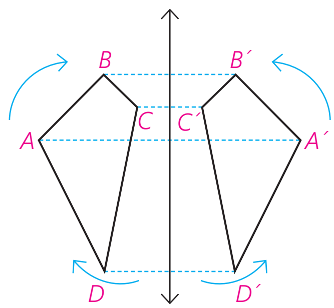
ب) دوران به مرکز O و با زاویه 120° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت

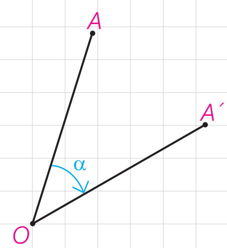


تمرین

۱ــ در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.

۲ــ در شکل زیر چهار ضلعی $A'B'C'D'$ تصویر **چهارضلعی محدب** $ABCD$ تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B، C و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟

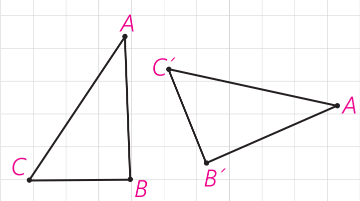




۳ــ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) در شکل مقابل نقطهٔ A' دوران یافتهٔ نقطهٔ A در دوران به مرکز O و زاویه α است. نشان دهید عمودمنصف AA' از نقطهٔ O می‌گذرد.

ب) اگر بدانیم $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ دوران یافتهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟

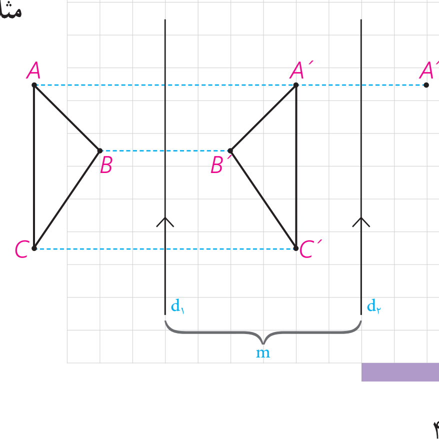


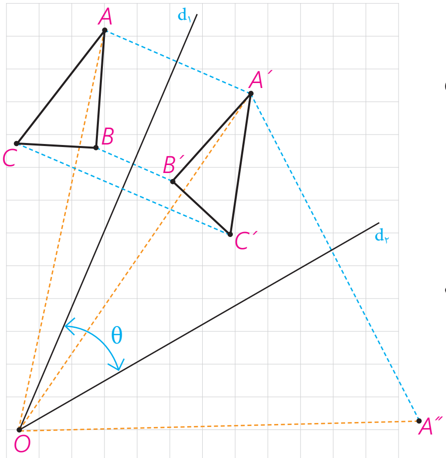
۴ــ در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصلهٔ m از آن قرار دارد و مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.

الف) نشان دهید: $AA''=2m$

ب) اندازهٔ BB'' و CC'' چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟





۵ــ در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویهٔ θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.

الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''}=2\theta$

ب) اندازهٔ $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶ــ نقطهٔ A به فاصلهٔ $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطهٔ A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' می‌نامیم. نقطهٔ A را حول نقطهٔ A' به اندازهٔ ۱۲۰ درجه دوران می‌دهیم تا نقطهٔ A'' حاصل شود. طول پاره‌خط AA'' را محاسبه کنید.

۷ــ نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA'=16$ و نقطه O روی خط l و $OA=10$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط OA' چقدر است؟

تجانس

در شکل‌های متشابه دیدید که طول پاره‌خط‌ها الزاماً با هم یکسان نیستند؛ اما با یک نسبت، اندازهٔ همهٔ پاره‌خط‌ها بزرگ‌تر یا کوچک‌تر می‌شوند. ساده‌ترین تبدیل از این نوع را **تجانس** می‌نامیم. در تجانس ابعاد شکل با نسبت $k\neq 0$، آن را **نسبت تجانس (مقیاس)** می‌نامیم، بزرگ یا کوچک می‌شود.

تعریف دقیق‌تر تجانس بدین شکل است:

تعریف: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k\neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطه O، M و M' روی یک خط راست باشند.

ب) $OM'=|k|.OM$

پ)
– اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطهٔ O قرار دارند.

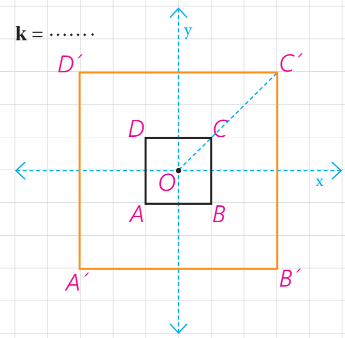
مثال: $OM'=2\,OM$ O ---- M ---- M´ $k=2$

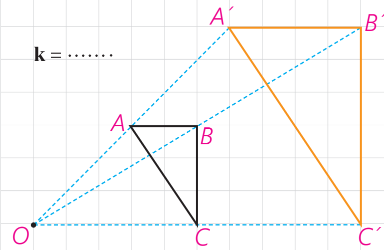
$OM'=\frac{1}{2}OM$ O -- M´ -- M $k=\frac{1}{2}$

– اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

مثال: $OM'=2\,OM$ M´ ---- O ---- M $k=-2$

به عبارتی، هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز O و نسبت k، تصویر نقطه‌ای مثل M را پیدا کنیم، ابتدا از M به O وصل می‌کنیم؛ اگر k مقداری مثبت باشد، روی نیم خط OM، نقطه M' را چنان می‌یابیم که $OM' = k.OM$ و اگر k عددی منفی باشد، نقطهٔ M' را روی خط OM به گونه‌ای جدا می‌کنیم که نقطهٔ O بین نقاط M و M' باشد و $OM'=|k|.OM$. در تجانس به مرکز O و نسبت k، نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M به نسبت k و نقطهٔ M مجانس نقطهٔ M' با نسبت $\frac{۱}{k}$ است؛ چرا؟





فعالیت

۱ــ این دو شکل، نمونه‌ای از تجانس را نشان می‌دهند که در یکی، مرکز تجانس داخل شکل اولیه و در دیگری خارج آن در نظر گرفته شده است.

الف) به کمک صفحه شطرنجی در هر شکل نسبت تجانس را مشخص کنید.

ب) آیا تجانس طولپاست؟ چرا؟

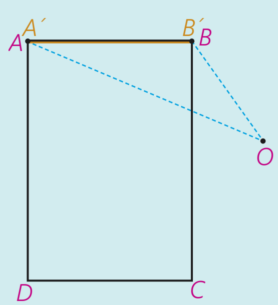
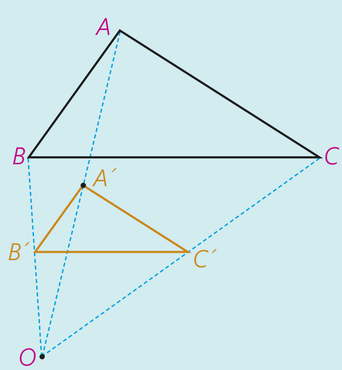
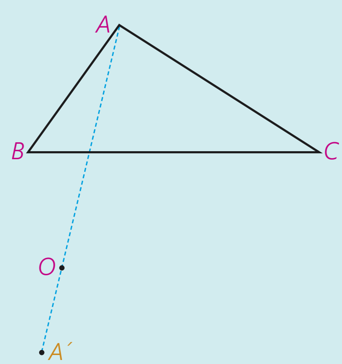
پ) در این شکل‌ها، طول هر پاره‌خط را با طول تصویر آن مقایسه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌توان رسید؟

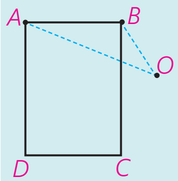
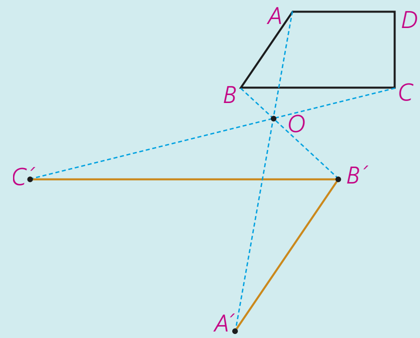
ت) مساحت هر شکل را با مساحت تصویر آن مقایسه کنید. چه نسبتی با هم دارند؟

۲ــ در هر دو حالت فوق، نسبت تجانس مقداری بیش از یک است؛ به‌عبارتی : $k>۱$.

حال مسئله را برای مقادیر مختلف k بررسی می‌کنیم.

الف) در هر حالت مراحل باقی‌مانده را کامل کنید.

k	**k = ۱**	$۰ < k < ۱$	$-۱ < k < ۰$
مثال		$k = \frac{۱}{۲}$	$k = -\frac{۱}{۳}$
			

k	$k = -۱$	$k < -۱$
مثال		$k = -۲$
		

ب) با توجه به تصاویر صفحه قبل به طور شهودی، درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید :

			طولپاست	اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود.	شیب خط حفظ می‌شود.	جهت شکل حفظ می‌شود.	مساحت شکل حفظ می‌شود.
تجانس	$k > ۰$	$k > ۱$	×				
		$k = ۱$					
		$۰ < k < ۱$					
	$k < ۰$	$-۱ < k < ۰$			✓		
		$k = -۱$					
		$k < -۱$					

پ) شرط اینکه تجانس طولپا باشد، این است که ....

ت) خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می‌کند، یعنی خطوط AA'، BB' و ... نسبت به هم چه وضعی دارند؟

ث) اگر $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ مجانس $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد، مرکز تجانس را چگونه می‌توان پیدا کرد؟

در تجانس به مرکز O و نسبت k:

اگر $k > 0$ تجانس را، **تجانس مستقیم** می‌نامیم.

اگر $k < 0$ تجانس را **تجانس معکوس** می‌نامیم.

اگر $|k| < 1$ تصویر شکل .... می‌شود و آن را **انقباض** می‌نامیم.

اگر .... تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را **انبساط** می‌نامیم.

حال که به طور شهودی با تجانس و چگونگی عملکرد آن روی شکل‌های هندسی آشنا شدید با استدلال دقیق‌تری ثابت خواهیم کرد که تجانس تبدیلی است که در حالت کلی شیب خط و اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

فعالیت

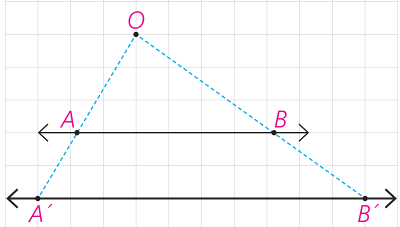
می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. برای این منظور، تجانس D[1]، با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و خط AB را در نظر می‌گیریم؛ دو حالت اتفاق می‌افتد :

الف) نقطهٔ O روی خط AB است.

حل : در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B، روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی‌کند.

ب) نقطهٔ O غیر واقع بر خط AB است.

حل : در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم :



$$\begin{cases} OA' = k.OA \\ OB' = ... \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{.....}{.....} = ...$$

$$\Rightarrow AB \| A'B' \qquad \text{(چرا؟)}$$

پس در این حالت نیز خط و تصویر آن با هم موازی‌اند و شیب دو خط، برابر است؛ بنابراین :

قضیه: تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

تذکر: حالتی که $k<0$ به‌عنوان تمرین به شما واگذار شده است.

1ـ Dilation

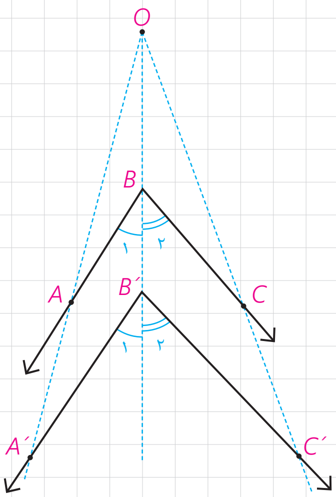
فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و زاویه $\widehat{ABC}$ را در نظر می‌گیریم.

مجانس این زاویه، یعنی زاویه $\widehat{A'B'C'}$ را رسم می‌کنیم.

به کمک قضیهٔ قبل و شکل داده شده، ثابت کنید : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.



نتیجهٔ این فعالیت را در قالب قضیهٔ زیر مطرح می‌کنیم :

قضیه: تجانس، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

تذکر: اثبات در حالتی که $k<0$ به‌عنوان تمرین به شما واگذار شده است.

کاردرکلاس

۱ــ الف) فرض کنید پاره‌خط $A'B'$ مجانس پاره‌خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد؛ نشان دهید : $|k| = \frac{A'B'}{AB}$ (نقطهٔ O را خارج AB در نظر بگیرید.)

ب) اگر nضلعی $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ مجانس nضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ باشد، نشان دهید این دو nضلعی با هم متشابه‌اند.

۲ــ با توجه به ویژگی‌های تجانس و به کمک مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.

فعالیت

پیش از این دیدیم که اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است و داریم $S(A) = A' = A$؛ این نقاط را .... نامیدیم. اما برخی از تبدیل‌ها، **هر نقطهٔ صفحه** را به **خود آن نقطه** نظیر می‌کند؛ چنین تبدیل‌هایی را **تبدیل همانی** می‌نامیم.

تعریف: تبدیل T را تبدیل همانی گوییم، هر گاه به ازای هر نقطهٔ A از صفحه P داشته باشیم $T(A) = A$.

معمولاً تبدیل‌های همانی را با I نمایش می‌دهند؛ پس $I(A) = A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

ب) آیا تبدیل همانی طولپاست؟

پ) توضیح دهید که در هر یک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

۱ــ انتقال غیرهمانی :

۲ــ دوران غیرهمانی :

۳ــ تجانس غیرهمانی :

کار در کلاس

۱ــ درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

	طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.	اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.
بازتاب					
انتقال					
دوران					
تجانس					

تمرین

۱ــ در تجانسی با نسبت $k<0$ و مرکز تجانس O (نقطه O را خارج AB در نظر بگیرید) نشان دهید :

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

۲ــ دایره $C(O,R)$ و نقطهٔ M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطهٔ M در هر حالت رسم کنید.

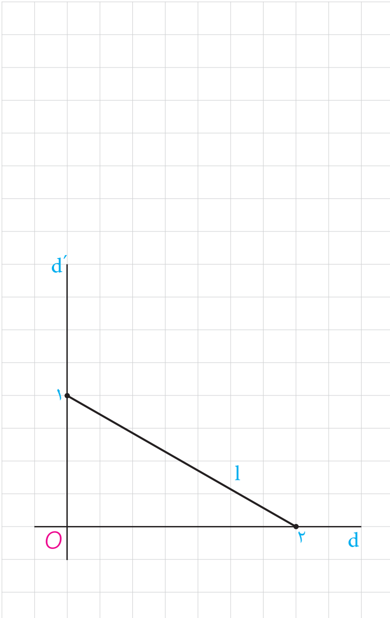
(**راهنمایی:** تصویر مرکز و یک نقطه دلخواه از دایره را تحت تجانس پیدا کنید.)

الف) $k=2$

ب) $k=-2$

پ) $k=\frac{1}{2}$

۳ــ یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محلی تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.



۴ــ در شکل روبه‌رو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را l' بنامیم، مساحت بین خط l و l' و خطوط d و d' چقدر است؟

مجله ریاضی

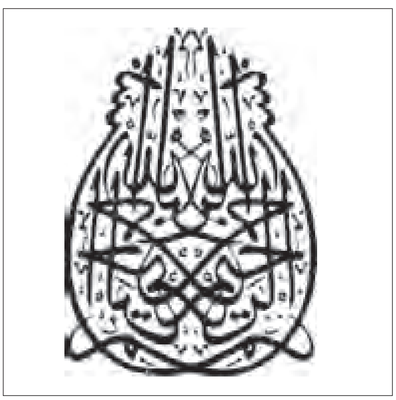
تصاویر زیر، نمونه‌هایی از نقاشی‌های دانش‌آموزان است که استفاده از بازتاب در آن نقشی عمده دارد.

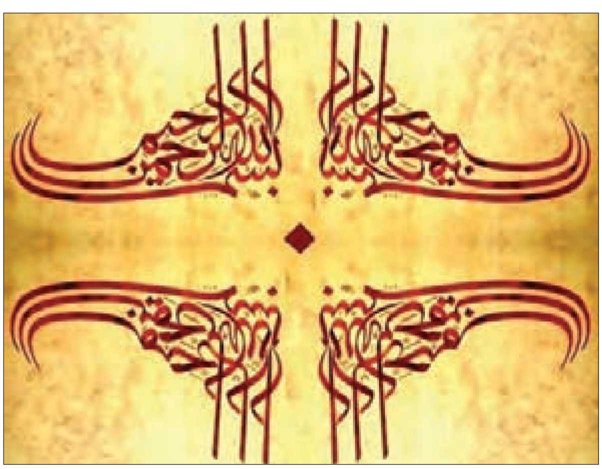
درس دوم

کاربرد تبدیل‌ها

تبدیل‌های هندسی شامل بازتاب، انتقال، دوران و تجانس به طور مستقیم و غیرمستقیم در زندگی واقعی کاربرد دارد؛ برای مثال در سال‌های گذشته با کاربرد برخی تبدیل‌ها در کاشی‌کاری آشنا شدید. آیا می‌توانید با تأمل در محیط اطراف خود به نمونه‌هایی اشاره کنید که تبدیل‌های هندسی در آن به‌کار رفته‌اند؟

به این تصاویر دقت کنید. کدام‌یک از تبدیل‌های هندسی بر زیبایی خوشنویسی‌های زیر افزوده است؟



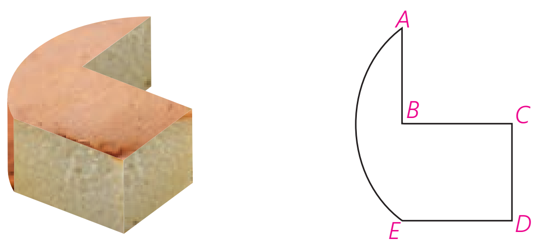


کاربردهایی از بازتاب (قرینه‌یابی)

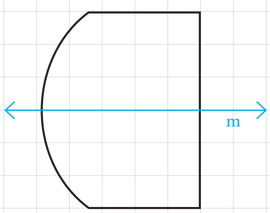
بازتاب علاوه بر شاخه‌های مختلف ریاضی در دیگر علوم نظیر هنر، معماری، فیزیک و ... کاربرد دارد. در علم فیزیک، ویژگی‌های بازتاب همان ویژگی‌های آینهٔ تخت است. کاربردهای دیگری از بازتاب را در ادامه خواهیم دید.

دریاچه‌ای در قلهٔ سبلان | استان اردبیل

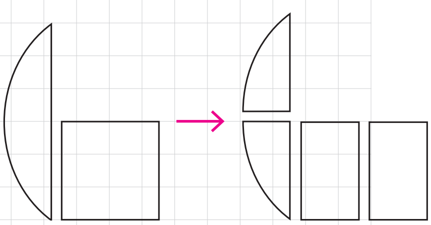
۱ــ می‌خواهیم کیکی به شکل زیر را به‌طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنیم. نمای بالای کیک از مربع BCDE و کمان AE از یک دایره تشکیل شده است به طوری که A و B و E روی یک خط هستند.



اگر نمای بالای کیک به شکل روبه‌رو بود، تقسیم آن کار ساده‌ای بود؛ چرا که می‌توانستیم از روی خط بازتاب m کیک را برش بزنیم و آن را به دو نیمهٔ مساوی تقسیم کنیم.

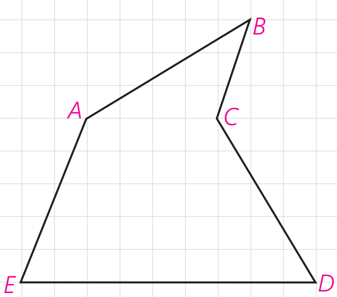


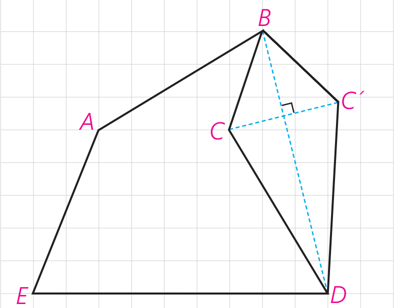
این شکل، راه ساده‌ای برای برش زدن کیک و تقسیم آن به دو سهم برابر ارائه می‌کند. توضیح دهید که بازتاب به حل این مسئله چه کمکی کرده است.



۲ــ یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل **هم‌پیرامونی** یا **هم‌محیطی** معروف‌است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چند ضلعی را تغییر دهیم.

برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چندضلعی ABCDE داریم که دور آن را حصار کشیده‌ایم. حال می‌خواهیم با ثابت نگهداشتن محیط و ثابت نگهداشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازهٔ حصارکشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم.





به کمک این تصویر توضیح دهید که این عمل را چگونه می‌توان انجام داد.

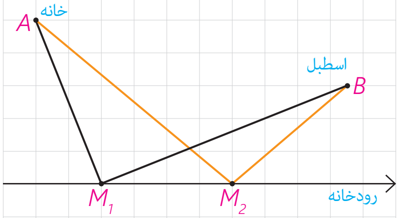
چرا محیط چندضلعی ABCDE با محیط چندضلعی ABC′DE یکی است؟

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

الف) هرون، ریاضی‌دانی است که به او دایرةالمعارف ریاضی و فیزیک لقب داده‌اند. او که در فاصلهٔ زمانی ۲۵۰ تا ۱۵۰ سال قبل از میلاد مسیح در مصر زندگی می‌کرد برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد.

او با این مسئله روبه‌رو شده بود که:

«مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبهٔ مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل[1] ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می‌کند، کمترین حالت ممکن باشد؟»

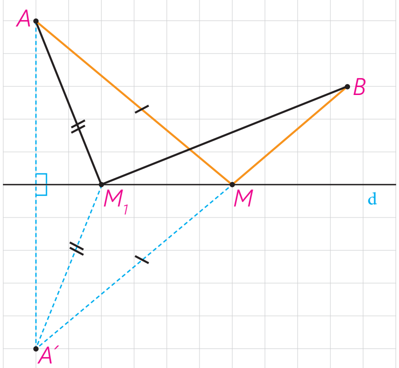


مسئله، پیدا کردن نقطهٔ M روی خط d است به گونه‌ای که AM+MB کمترین مقدار ممکن باشد.

هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرد و آن را A′ نامید. خط فرضی A′B خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع می‌کند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و AM+MB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

با هم دلیل ادعای هرون را بررسی می‌کنیم:

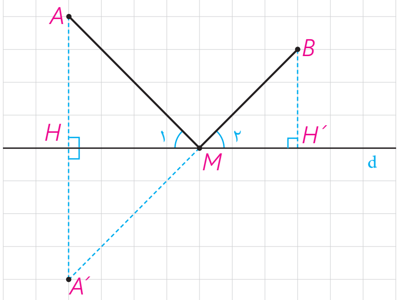
۱ــ برای هر نقطهٔ دلخواه دیگری نظیر M_1 داریم $M_1A = M_1A'$ (و به همین ترتیب $AM=A'M$)؛ چرا؟



۲ــ در مثلث $A'M_1B$ داریم $A'M_1 + M_1B > A'B$؛ چرا؟

از تساوی $A'B=A'M+MB$ و (۱) و (۲) ادعای هرون را اثبات کنید.

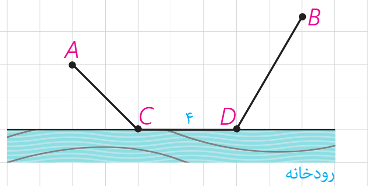
سؤال: در روش هرون نقطهٔ A′ طرف دیگر رودخانه قرار دارد. اگر در عمل به دنبال یافتن کوتاه‌ترین مسیر مورد نظر باشیم و امکان رفتن به طرف دیگر رودخانه نباشد، چگونه نقطهٔ M را می‌توان پیدا کرد؟



(**راهنمایی:** از تشابه دو مثلث AHM و BH′M کمک بگیرید و توجه داشته باشید که اندازه‌های AH و BH′ دو مقدار معلوم هستند.)

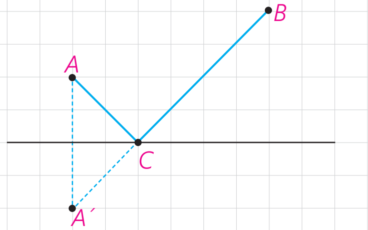
۱ــ جایی سرپوشیده برای نگهداری چهارپایان به ویژه اسب

ب) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به‌طوری‌که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

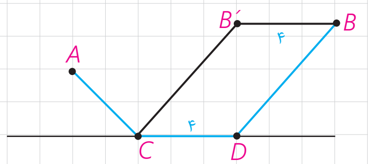


حل : مسئله را در چند مرحله حل می‌کنیم.

۱ــ اگر جادهٔ ساحلی را از صورت مسئله حذف کنیم، به عبارتی اگر CD=۰، این مسئله به کدام‌یک از مسائلی شبیه است که قبلاً دیده‌اید؟



۲ــ با توجه به شرایط مسئله، مسیر موردنظر، باید مسیری به شکل مسیر ACDB باشد؛ اما :

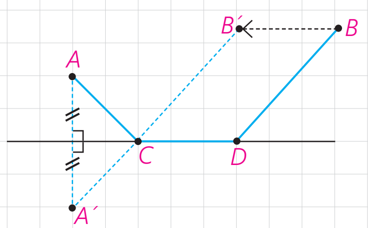


(چرا؟) طول مسیر ACB′B = طول مسیر ACDB

بنابراین : ۴ + طول مسیر ′ACB = طول مسیر ACDB

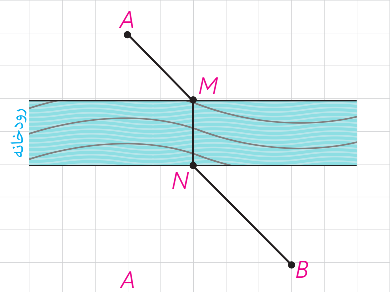
۳ــ پس کافی است برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن به شکل ACDB مسیر را به گونه‌ای انتخاب کنیم که طول ′ACB کوتاه‌ترین طول ممکن باشد.

۴ــ به کمک مراحل ۱ تا ۳ و شکل روبه‌رو توضیح دهید که رسم کوتاه‌ترین مسیر ACDB چگونه است.

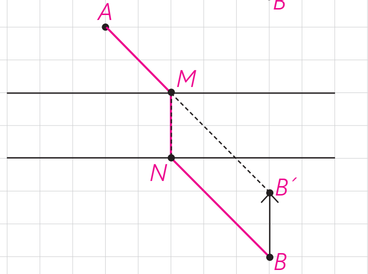


کار در کلاس

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری‌که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟



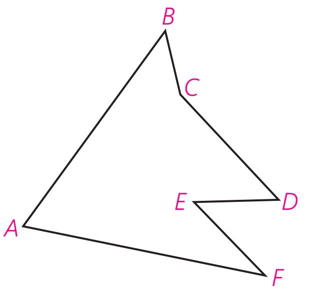
راهنمایی: به کمک فعالیت قبل و با توجه به تصویر داده شده، طریقهٔ رسم مسیر AMNB را شرح دهید و مشخص کنید چرا این مسیر، کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.



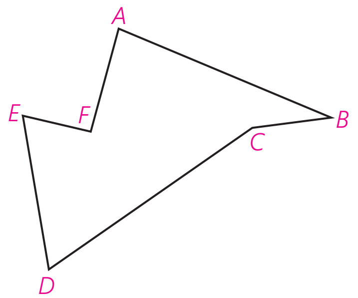
تمرین

۱ــ دور زمین‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

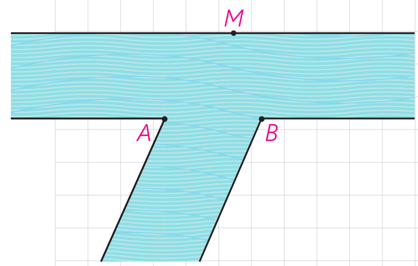
الف)



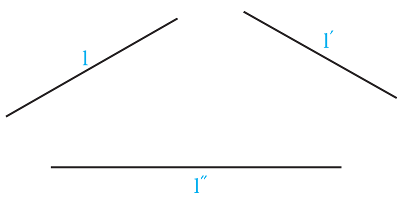
ب)



۲ــ می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است. اسکلهٔ M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟



۳ــ سه خط دو به دو ناموازی l و l' و l'' در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به‌طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی l و l'، و موازی l'' باشد.

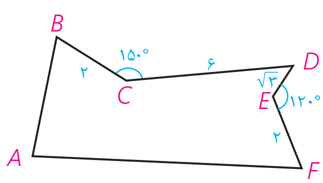


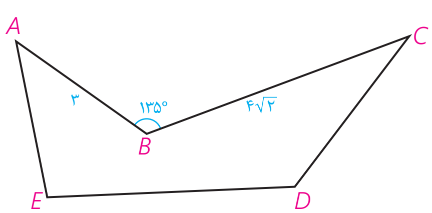
۴ــ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K=-\frac{1}{2}$ باشد.

الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۵ ــ زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم بدون آنکه محیط این زمین تغییر کند مساحتش را افزایش دهیم در هر مورد میزان افزایش مساحت را حساب کنید.



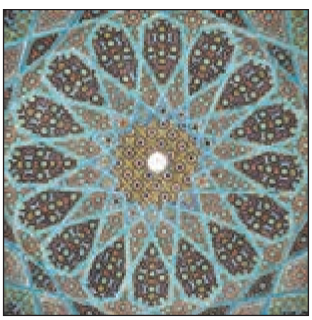


تبدیل‌های تقارنی یک شکل هندسی





در بسیاری از مناظر طبیعی، گیاهان و جانوران، ساختار اتم‌ها، معماری، هنرهای مختلف دستی و نیز شکل‌های هندسی می‌توان نوعی نظم و تعادل مشاهده کرد. در این بخش تبدیل‌هایی را مرور می‌کنیم که یک شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند. چنین تبدیل‌هایی را تبدیل‌های تقارنی آن شکل می‌نامیم. فعالیت صفحهٔ بعد برای روشن‌تر شدن این موضوع، طراحی شده است.



مثلث متساوی‌الاضلاعی را در نظر بگیرید :

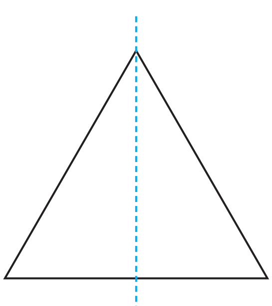
الف) بازتاب این مثلث نسبت به خط داده شده چگونه است؟................

ب) آیا تحت این بازتاب تصویر هر نقطه از شکل لزوماً خود آن نقطه است؟.........

پ) آیا تحت این بازتاب، تصویر هر نقطه از شکل، روی خود شکل است؟

ت) آیا خط بازتاب دیگری برای این مثلث سراغ دارید؟ ....

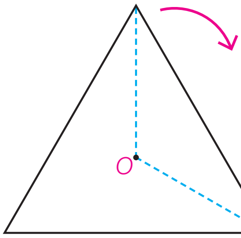
این مثلث چند خط بازتاب دارد؟........



ث) آیا غیر از بازتاب، تبدیل دیگری سراغ دارید که هر نقطه از شکل را به نقطه‌ای از همان شکل ببرد؟............

برای مثال آیا با مرکز O (نقطه همرسی نیمسازها) می‌توانید دوران‌هایی معرفی کنید که شکل را بر خودش منطبق کند؟.........

اگر $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ زاویهٔ دوران باشد، چند دوران به مرکز O و زاویهٔ α می‌توانید مشخص کنید؟ ....



تعریف: اگر شکلی تحت یک بازتاب بر خودش منطبق شود، گوییم آن شکل **تقارن بازتابی (خطی)** دارد و اگر آن شکل تحت دورانی با زاویهٔ $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ بر خودش منطبق شود، گوییم **تقارن دورانی (چرخشی)** دارد.

همان‌گونه که در این فعالیت دیدید در مثلث متساوی‌الاضلاع، سه بازتاب و سه دوران متفاوت می‌توان معرفی کرد که نقاط این مثلث را به نقاطی از همین مثلث نظیر کند.

به عبارتی، تحت این تبدیل‌ها تصویر این مثلث بر خودش منطبق می‌شود؛ چنین تبدیل‌هایی را **تبدیل‌های تقارنی** این مثلث می‌نامیم. در اینجا برای شناسایی تبدیل‌های تقارنی یک شکل، شکل را تنها در یک جهت (خلاف یا موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم؛ با این تعریف، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای ۶ تبدیل تقارنی است.

دقت کنید که دوران 360°، تبدیل انتقال با بردار صفر و تبدیل تجانس با نسبت تجانس $k=1$، علاوه بر اینکه هر شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند هر نقطه از شکل را نیز به خود آن نقطه نظیر می‌کنند. که پیش از این، آنها را «تبدیل‌های همانی» نامیدیم. بنابراین تمام تبدیل‌های همانی فقط یک تبدیل تقارنی به شمار می‌رود.

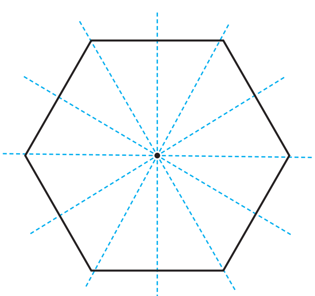
تعریف: تبدیل طولپای T را **تبدیل تقارنی** شکل F می‌نامیم به شرط اینکه تبدیل‌یافتهٔ شکل F، تحت آن تبدیل بر خود شکل F منطبق شود؛ یعنی داشته باشیم: $T(F) = F$

تعریف: تقارن دورانی با زاویه 180° را **تقارن مرکزی** نیز می‌نامند.
در این حالت مرکز دوران را **مرکز تقارن** شکل می‌گویند.

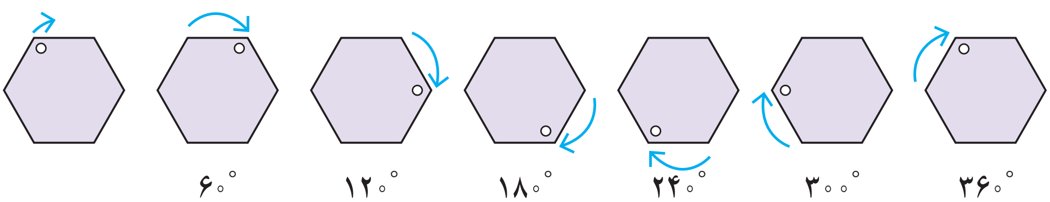
مثال

شش ضلعی منتظم، ۶ تقارن بازتابی و ۶ تقارن دورانی دارد.

تقارن‌های بازتابی :



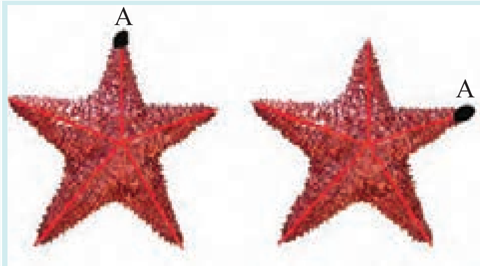
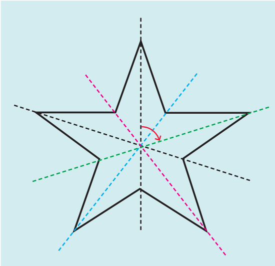
تقارن‌های دورانی :



همان‌طور که اشاره شد تقارن دورانی با زاویهٔ ۳۶۰°، انتقال با بردار صفر و تجانس با نسبت تجانس $k=۱$ تبدیل‌های همانی هستند.

تبدیل‌های همانی را تقارن همانی نیز می‌نامند؛ با این تعریف، هر شکلی دارای تقارن همانی است.

شکل‌های زیر را به عنوان تصویر دو بعدی در نظر بگیرید و جدول را کامل کنید :

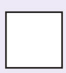
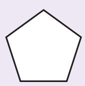
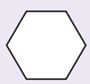
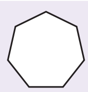
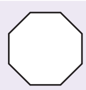
		
تقارن‌های دورانی	**تعداد تقارن‌های بازتابی**	**تعداد کل تقارن‌ها**
۷۲°،	....	....

تعداد تبدیل‌های تقارنی را در هر شکل مشخص کنید.

الف) پاره‌خط　　　　ب) خط　　　　پ) دایره

مسائلی برای علاقه‌مندان

۱ــ الف) با تکمیل جدول زیر تعداد تبدیل‌های تقارنی nضلعی منتظم را مشخص کنید.

nضلعی منتظم	n=۳	n =۴	n=۵	n=۶	n=۷	n=۸	...	n
								
تعداد تقارن‌های بازتابی								
تعداد تقارن‌های دورانی								
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی								
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟								

ب) nضلعی منتظم در چه صورتی مرکز تقارن دارد؟

پ) الگویی برای پیدا کردن زاویه‌های دوران در تقارن‌های دورانی یک nضلعی منتظم ارائه کنید.

۲ــ تقارن‌های خطی و دورانی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مثلث متساوی‌الساقین و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را مشخص کنید و در جدولی بنویسید.

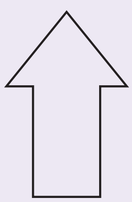
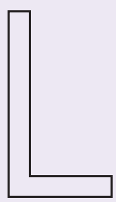
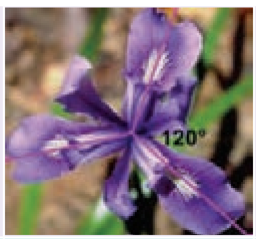
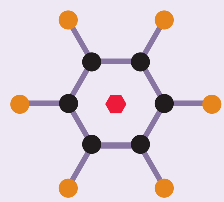
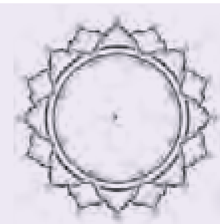
کدام یک از این شکل‌های هندسی، مرکز تقارن دارند؟

۳ــ الف) شکلی رسم کنید که خط بازتاب داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد (یعنی تقارن خطی داشته‌باشد، اما تقارن دورانی غیرهمانی نداشته باشد).

ب) شکلی رسم کنید که مرکز تقارن داشته باشد، ولی خط بازتاب نداشته باشد (یعنی تقارن دورانی غیرهمانی داشته‌باشد، اما تقارن خطی نداشته باشد).

۴ــ نشان دهید اگر شکلی دو خط بازتاب عمود بر هم داشته باشد، محل تلاقی این دو خط، مرکز تقارن شکل است (در واقع هر شکل که دارای دو تقارن بازتابی باشد که دو خط بازتاب آن بر هم عمود باشند، دارای تقارن دورانی است).

۵ــ جدول زیر را کامل کنید.

شکل					
تقارن بازتابی					
تقارن دورانی					
تعداد تبدیل‌های تقارنی					

۳

فصل سوم

روابط طولی در مثلث

عکس: فرهاد کولی‌وند

محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس یکی از مهم‌ترین کاربردهای روابط طولی در هندسه است. از جملهٔ آنها محاسبهٔ ارتفاع کوه‌های بلند است. رشته‌کوه اشترانکوه که ارتفاع آن در برخی نقاط به بیش از ۴۰۰۰ متر می‌رسد در استان لرستان واقع است.

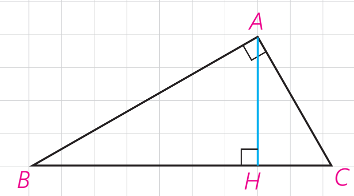
تئودولیت (زاویه‌یاب) یکی از ابزارهای لازم برای این‌گونه محاسبات عملی است.

درس اوّل

قضیهٔ سینوس‌ها

یادآوری

منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازه‌های پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند. در سال گذشته روابط طولی زیر را در مثلث قائم‌الزاویه دیدیم :



۱ــ $AB^۲=BC.BH$

۲ــ $AC^۲=BC.CH$

۳ــ $AH^۲=BH.CH$

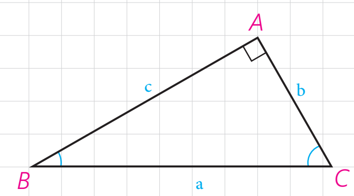
۴ــ $AB^۲+AC^۲=BC^۲$

۵ــ $AB.AC=BC.AH$

اینک به ادامهٔ بحث در مثلث‌های دلخواه می‌پردازیم.

فعالیت ۱

در کتاب ریاضی ۱ (پایهٔ دهم) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، جاهای خالی را پر کنید :



$$\text{Sin}B=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow\frac{b}{\text{Sin}B}=\cdots$$

$$\text{Sin}C=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow\frac{c}{\text{Sin}C}=\cdots$$

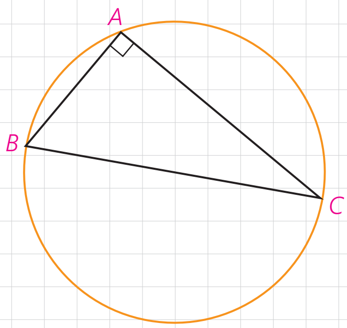
$$\text{Sin}A=\text{Sin}۹۰^\circ=\cdots\Rightarrow\frac{a}{\text{Sin}A}=\cdots$$

بنابراین داریم :

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ هر .... به .... برابر است با اندازهٔ ....

فعالیت ۲

در کتاب هندسهٔ ۱ دیدیم که عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است. دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟



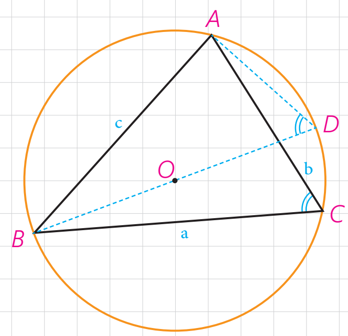
با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۱) می‌توانیم بگوییم :

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازهٔ .... دایرهٔ محیطی مثلث.

اکنون نشان می‌دهیم این نتیجه‌گیری برای هر مثلث دلخواه نیز درست است.

فعالیت ۳

مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} < ۹۰^\circ$) و دایرهٔ محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم. قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم.



۱ــ زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟

اندازهٔ آنها برابر است با نصف ....

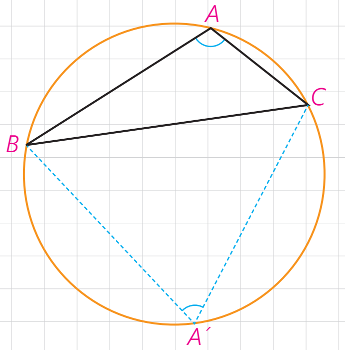
۲ــ چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟

۳ــ با توجه به دو قسمت قبل، داریم :

$$\text{SinC} = \text{SinD} \quad \text{و} \quad \text{SinD} = \frac{\cdots}{\cdots} \Rightarrow \text{SinC} = \frac{\cdots}{۲R} \Rightarrow \frac{c}{\text{SinC}} = ۲R$$

۴ــ به‌طور مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{a}{\text{SinA}} = \cdots \quad , \quad \frac{b}{\text{SinB}} = \cdots$$



۵ــ حال مثلث ABC ($\hat{A} > ۹۰^\circ$) را در نظر بگیرید. نقطهٔ دلخواه A' روی کمان BC را به B و C وصل می‌کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

$\hat{A} + \hat{A}' = \cdots$ بنابراین $\hat{A}'$ زاویه‌ای حاده است.

با توجه به آنچه از مثلثات می‌دانید، جاهای خالی را پر کنید :

$$\sin A=\sin(\dots-A')=\dots$$

در مثلث $A'BC$، طبق نتیجهٔ قسمت (۳) می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{a}{\sin A'}=\dots \Rightarrow \frac{a}{\sin A}=\dots$$

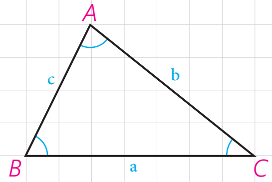
نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازهٔ هر .... به .... زاویهٔ روبه‌رو به آن برابر است با ....

قضیهٔ سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

$$\frac{a}{\mathrm{Sin}A}=\frac{b}{\mathrm{Sin}B}=\frac{c}{\mathrm{Sin}C}=$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.



مثال ۱ : در مثلث ABC، $BC=۱۰cm$ و $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ و $AC=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ مقدار شعاع دایرهٔ محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به‌دست آورید.

حل : به کمک قضیهٔ سینوس‌ها می‌توان نوشت :

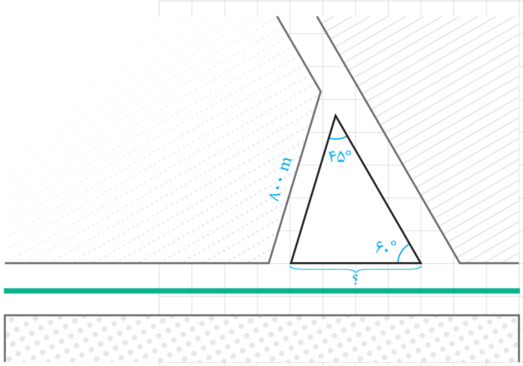
$$\frac{a}{\sin A}=۲R \Rightarrow \frac{۱۰}{\sin ۱۲۰^\circ}=۲R \quad \text{و} \quad \sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲R=\frac{۱۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \quad \text{و} \quad R=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$$

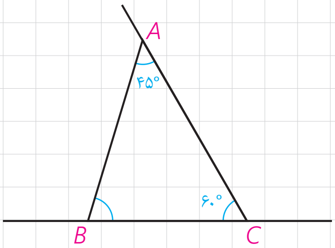
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=۲R \Rightarrow \frac{\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin B}=\frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \sin B=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۲۰\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow B=۴۵^\circ \text{ یا } ۱۳۵^\circ \text{ و } \hat{A}=۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۴۵^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۵^\circ$$

مثال ۲ : از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویهٔ ۶۰° جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می‌خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول ۸۰۰ متر بنا کند تا با زاویهٔ ۴۵° از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس زاویهٔ ۶۰° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه‌ای می‌سازد؟



حل : با یک شکل مناسب مسئله را مدل‌سازی می‌کنیم. اولاً با توجه به مجموع اندازه‌های زوایای داخلی مثلث، روشن است که $\hat{B}=۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۶۰^\circ)=۷۵^\circ$ ؛ یعنی خیابان فرعی باید با زاویهٔ ۷۵° از بلوار جدا شود. ثانیاً به کمک قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم :



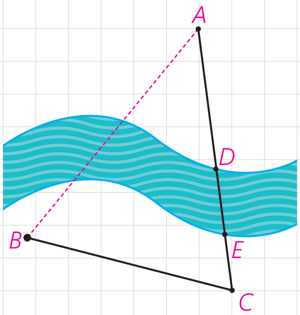
$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{۸۰۰}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{BC}{\sin ۴۵^\circ}\Rightarrow BC=\frac{۸۰۰\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=$$

$$\frac{۸۰۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{۸۰۰\sqrt{۶}}{۳}\approx ۶۵۳/۲\,m$$

یعنی خیابان فرعی را باید از فاصله تقریبی ۶۵۳/۲ متر با زاویهٔ ۷۵° بنا کنیم.

کاردرکلاس

می‌خواهیم روی یک رودخانهٔ عمیق بین دو نقطهٔ A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به‌دست بیاوریم؛ امّا امکان اندازه‌گیری مستقیم (به‌دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطهٔ A در جهتی حرکت می‌کنیم تا با عبور از قسمت کم‌عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس با زاویه‌یاب (تئودولیت) زاویهٔ دید AC از نقطهٔ B ($\hat{B}$) و زاویهٔ دید AB از C ($\hat{C}$) را اندازه می‌گیریم. به‌صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ می‌توان فاصلهٔ AB را به‌دست آورد :



$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\ldots\ldots}\Rightarrow\frac{BC}{\sin(۱۸۰^\circ-(\ldots\ldots+\ldots\ldots))}=\frac{AB}{\ldots\ldots}\Rightarrow AB=\frac{\ldots\ldots\times\ldots\ldots}{\sin(\ldots\ldots)}$$

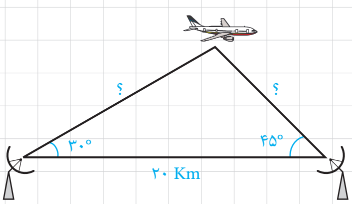
اگر BC=۳km و $\hat{B}=۷۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$ به کمک ماشین حساب طول AB را به‌دست آورید.

تمرین

۱ــ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) با ارتفاع $AH=h_a$ داریم :

$$\frac{۱}{h_a^۲}=\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}$$

۲ــ دو ایستگاه رادار، که در فاصلهٔ ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصلهٔ هواپیما را از دو ایستگاه به‌دست آورید.



درس دوم

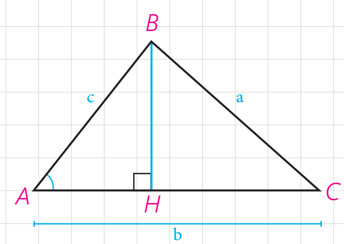
قضیهٔ کسینوس‌ها

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$). با داشتن طول‌های دو ضلع (AB=c) و (AC=b) می‌توانیم اندازه وتر مثلث (BC=a) را بر حسب b و c به‌دست آوریم: $a^2=b^2+c^2$

حال می‌بینیم که اگر $\hat{A}$ مساوی 90° هم نباشد، می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

فعالیت ۱

در مثلث ABC ($\hat{A}<90^\circ$)، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم. با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث‌های قائم‌الزاویه، جاهای خالی را پر کنید:



$\cos A=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow AH=\cdots\times\cdots$ و $CH=b-AH=\cdots$

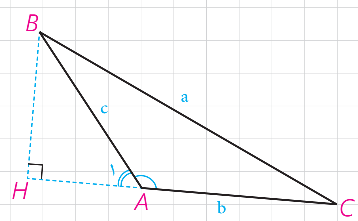
$\sin A=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow BH=\cdots\times\cdots$

$\Delta BHC: BC^2=BH^2+CH^2\Rightarrow a^2=(\cdots\cdots)^2+(\cdots\cdots)^2$

حال به کمک اتحادهای جبری و اتحاد مثلثاتی $\sin^2A+\cos^2A=1$، نشان دهید:

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$

اکنون در مثلث ABC ($\hat{A}>90^\circ$) ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم.



اگر $\hat{A}_1$ زاویهٔ خارجی رأس A باشد با توجه به اینکه $\hat{A}_1=180-\hat{A}$ داریم: $\sin A_1=\cdots$ و $\cos A_1=\cdots$ و در مثلث ABH نیز با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی می‌توان نوشت:

$\cos A_1=\frac{\cdots}{\cdots}$ و $\sin A_1=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow AH=\cdots\cdots\times\cdots\cdots$ و

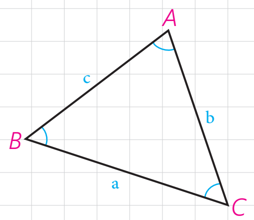
$BH=\cdots\cdots\times\cdots\cdots$ و $CH=b+AH=\cdots\cdots$

$\Delta BHC: BC^2=BH^2+CH^2\Rightarrow a^2=(\cdots\cdots)^2+(\cdots\cdots)^2$

و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید :

$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc.\cos A$

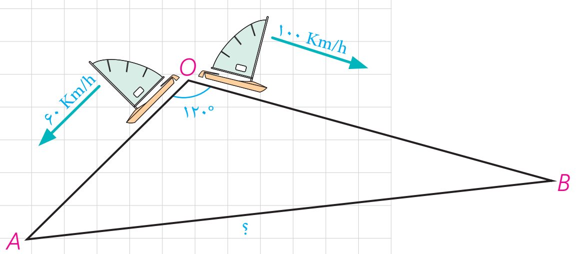
سؤال : در حالتی که زاویهٔ A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟



قضیهٔ کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آنها:

$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc.\cos A$, $b^۲=\cdots\cdot+\cdots\cdot-\cdots\cdot$

$c^۲=\cdots\cdot+\cdots\cdot-\cdots\cdot$



مثال : دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های ۶۰km/h و ۱۰۰km/h و با زاویهٔ °۱۲۰ از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

حل : با توجه به نقطهٔ شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود :

$OA=۶۰\times ۰/۵=۳۰$ و $OB=۱۰۰\times۰/۵=۵۰$

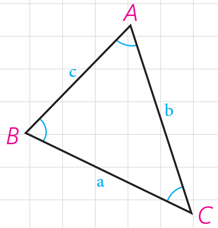
حال به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم :

$AB^۲=OA^۲+OB^۲-۲OA.OB.\cos۱۲۰^\circ$ و $\cos۱۲۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$

$AB^۲=۹۰۰+۲۵۰۰-۲\times۳۰\times۵۰\ (-\frac{۱}{۲})\ =۴۹۰۰\Longrightarrow$

$AB=۷۰\text{km}$

کار در کلاس



در مثلث ABC، $AB=۲\sqrt{۲}$ و $AC=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$

۱ــ طول ضلع BC را به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها به‌دست آورید.

$BC^۲=\cdots\cdot^۲+\cdots\cdot^۲-۲\times\cdots\cdot\times\cdots\cdot\times\cdots\cdot\Longrightarrow$

$BC^۲=\cdots\cdots+\cdots\cdots-\cdots\cdots\Longrightarrow$

$BC^۲=\cdots\cdots$ و $BC=\cdots\cdots$

۲ــ اندازهٔ $\hat{C}$ را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها به‌دست آورید و از آنجا اندازهٔ $\hat{B}$ را هم بیابید.

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{....}\Rightarrow \frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۶۰}\Rightarrow \sin C=\cdots \text{ و } \hat{C}=\cdots$$

$$\Rightarrow \hat{B}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{C})=....$$

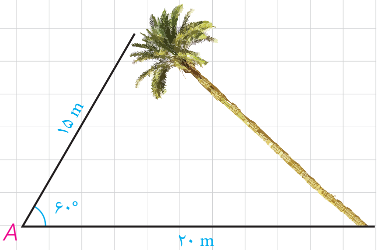
تمرین

۱ــ یک درخت کج از نقطهٔ A روی زمین، که در فاصلهٔ ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویهٔ ۶۰° دیده می‌شود. اگر فاصلهٔ A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است :

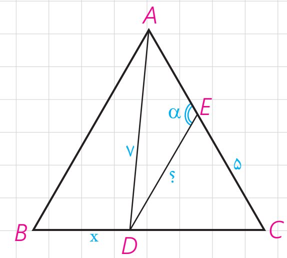
الف) طول درخت

ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

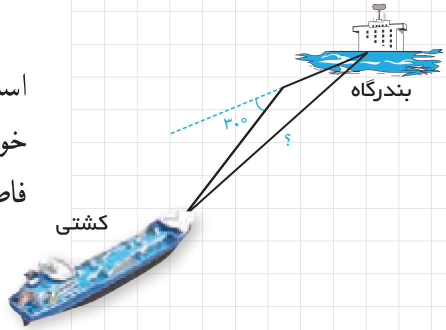
پ) فاصلهٔ نوک درخت از زمین

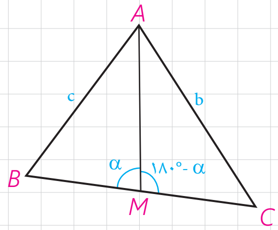


۲ــ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطهٔ D ، که به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟(CD >BD) نقطهٔ E ، که به فاصلهٔ ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازهٔ زاویهٔ AED چند درجه است؟



۳ــ یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصلهٔ بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

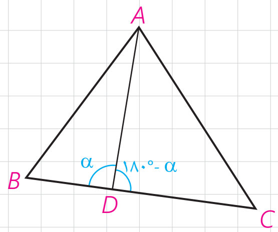




۴ــ در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{۲}$). با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$ (قضیهٔ میانه‌ها)

در حالت خاص AB=۴ و AC=۶ و BC=۸، طول میانه AM را به‌دست آورید.



۵ــ در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$AB^۲ . DC + AC^۲ . DB = AD^۲ . BC + DB . DC . BC$$ (قضیهٔ استوارت)

به کمک قضیهٔ استوارت، درستی قضیهٔ میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

۶ــ مسئلهٔ ۲ را بار دیگر، این‌بار به کمک قضیهٔ استوارت حل کنید.

درس سوم

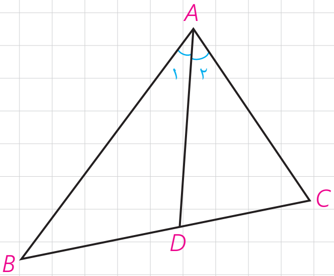
قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها

۱ـ قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی

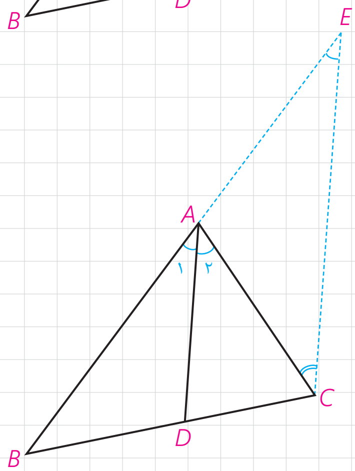
قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض : $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$

حکم : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



اثبات : مطابق شکل از نقطهٔ C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.



الف) چرا $\widehat{A}_۱ = \hat{E}$ و چرا $\widehat{A}_۲ = \hat{C}$؟

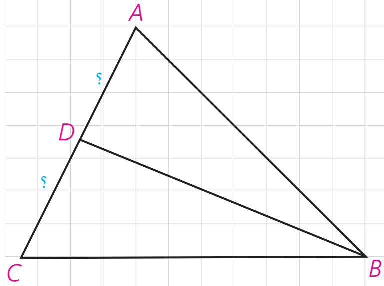
ب) با توجّه به فرض، چه نتیجه‌ای دربارهٔ زوایای E و C می‌توان گرفت؟ مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟

پ) با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث EBC $(AD \| EC)$ نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجهٔ قسمت (ب) اثبات را کامل کنید :

$$AD \| EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{....} = \frac{....}{....}$$

یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد :

مثال : در مثلث ABC، AB=۷، AC=۵ و BC=۸ است. طول‌های دو قطعه‌ای را به‌دست آورید که نیمساز زاویهٔ B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



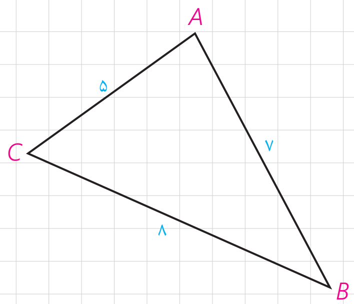
حل :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{۷}{۸} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{۷+۸}{۸} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow$$

$$CD = \frac{۸ \times ۵}{۱۵} = \frac{۸}{۳} , AD = AC - CD = ۵ - \frac{۸}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

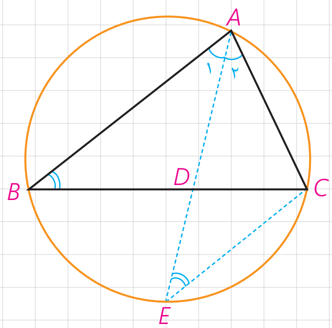
کار در کلاس

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویهٔ C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به‌دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.



۲ــ محاسبهٔ طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث

در مثلث ABC برای محاسبهٔ طول نیمساز داخلی زاویهٔ $\hat{A}$ $(\hat{A}_۱=\hat{A}_۲)$، یعنی AD، AD را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.



الف) چرا $\hat{E}=\hat{B}$؟

ب) چرا مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؟

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{....}=\frac{AE}{....}=\frac{....}{BD}$$

ت) از تناسب اول نتیجه می‌گیریم :

$$AB.AC=AD.AE=AD(AD+DE)=AD^۲+AD.DE$$

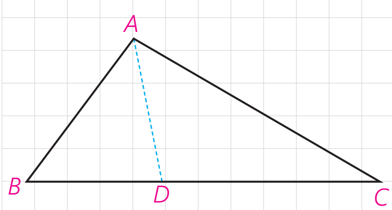
و چون $AD.DE=BD.DC$ (چرا؟) بنابراین :

$$AD^۲=AB.AC-BD.DC$$

قضیهٔ ۲: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

مثال : در مثلث ABC، AB=۳، AC=۵ و BC=۷ است. طول نیمساز زاویهٔ A را بیابید.

حل : به کمک قضیهٔ (۱) طول‌های BD و CD را به‌دست می‌آوریم :



$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{BD+CD}{CD}=\frac{۸}{۵}$$

$$\Rightarrow\frac{BC}{CD}=\frac{۸}{۵}\Rightarrow\frac{۷}{CD}=\frac{۸}{۵}\Rightarrow CD=\frac{۳۵}{۸},\ BD=۷-\frac{۳۵}{۸}=\frac{۲۱}{۸}$$

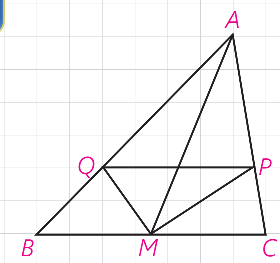
حال با توجه به قضیهٔ (۲) داریم :

$$AD^۲=AB.AC-BD.CD=۳\times۵-\frac{۳۵}{۸}\times\frac{۲۱}{۸}=$$

$$۱۵-\frac{۷۳۵}{۶۴}=\frac{۲۲۵}{۶۴}\Rightarrow AD=\frac{۱۵}{۸}$$

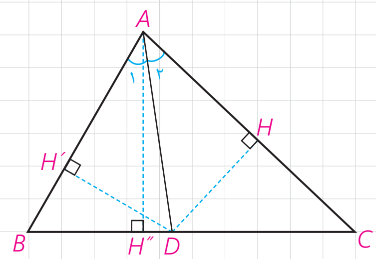
تمرین

۱ــ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید : PQ||BC



۲ــ در مثلث ABC، AB=۷ و AC=۴ و BC=۱۰ است. طول نیمساز زاویهٔ داخلی C را به‌دست آورید.

۳ــ با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید :



الف) چرا $DH = DH'$ ؟

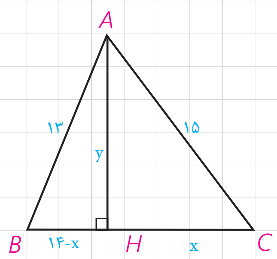
ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times ....}{\frac{۱}{۲}DH \times ....} = \frac{....}{....} \qquad (۱)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times ....}{\frac{۱}{۲}CD \times ....} = \frac{....}{....} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود : $\frac{....}{....} = \frac{....}{....}$

قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)



با مسئله زیر در کتاب هندسهٔ ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های AHB و AHC اندازه‌های x و y را به‌دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :

به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می کنیم :

$$\left.\begin{matrix} CH^۲+AH^۲=\cdots \\ BH^۲+AH^۲=\cdots \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^۲+y^۲=\cdots \\ (۱۴-x)^۲+y^۲=\cdots \end{cases}$$

طرفین این دوتساوی را از هم کم می‌کنیم که با حذف $y^۲$ معادله‌ای بر حسب x به دست می‌آید :

$$x^۲-(۱۴-x)^۲=\cdots \quad \Rightarrow \quad x^۲-۱۹۶-x^۲+۲۸x=\cdots$$

$$\Rightarrow \quad x=\cdots \quad , \quad y=\cdots \quad , \quad S=\frac{۱}{۲}BC.AH=\cdots$$

اگر همین روش را در حالت کلّی در مثلث ABC، که BC=a، AB=c و AC=b به کار ببریم، نتیجه می‌شود :

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \text{(دستور هرون)}$$

که در این دستور $P=\frac{a+b+c}{۲}$ نصف محیط مثلث است.

(اثبات کامل این دستور را می‌توانید در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل ببینید.)

مثال : مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون برابر است با :

$$۲P=۱۳+۱۴+۱۵=۴۲ \Rightarrow P=۲۱$$

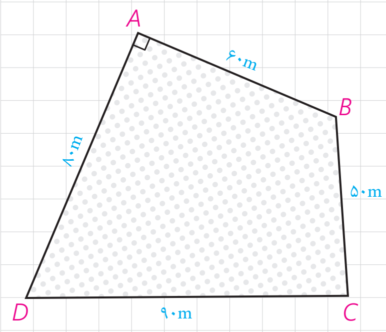
$$s=\sqrt{۲۱\times۶\times۷\times۸}=\sqrt{۷^۲\times۳^۲\times۲^۴}=۸۴$$

و طول‌های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با :

$$h_a=\frac{۲s}{a}=\frac{۲\times ۸۴}{۱۴}=۱۲\ ,\quad h_b=\cdots\cdots\ ,\quad h_c=\cdots\cdots$$

کار در کلاس

چهارضلعی ABCD یک مزرعهٔ کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده‌است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به‌دست آورید :



الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به‌دست می‌آورید؟

$$BD^۲=\cdots\cdots+\cdots\cdots=\cdots\cdots+\cdots\cdots=\cdots\cdots\ \Rightarrow\ BD=\cdots\cdots$$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به‌دست می‌آورید؟

$$S_{ABD}=\frac{\cdots\cdots\times\cdots\cdots}{۲}=\cdots\cdots$$

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به‌دست آورید.

$$P=\frac{\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots}{۲}=\cdots\cdots\ ,\ S_{CBD}=\cdots\cdots$$

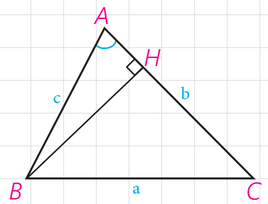
ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با :

$$S=\cdots\cdots+\cdots\cdots=\cdots\cdots$$

فعالیت

می‌خواهیم دستور دیگری برای محاسبهٔ مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی به‌دست آوریم.

۱ــ در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.



$$\sin A=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\ \Rightarrow\ BH=\cdots\cdots$$

۲ــ مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

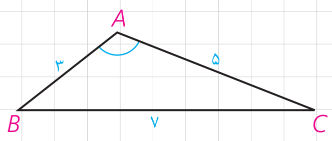
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BH\times AC=\cdots\cdots$$

نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آنها:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}bc.\sin A=\frac{۱}{۲}ab.\sin C=\frac{۱}{۲}ac.\sin B$$

کاردرکلاس



۱ــ مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به‌دست آورید.

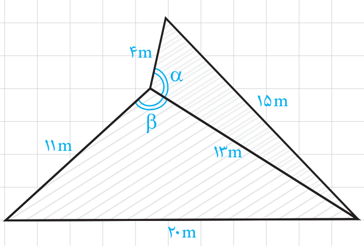
$$P=\frac{....+....+....}{۲}=....\Rightarrow S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=....$$

۲ــ مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S=\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A$ بنویسید.

۳ــ از مقایسهٔ نتایج ۱ و ۲، اندازهٔ زاویهٔ منفرجهٔ $\hat{A}$ را به‌دست آورید.

تمرین

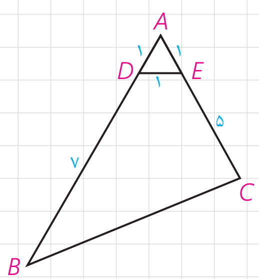
۱ــ در مثلث ABC، AB=۱۰، AC=۶ و $\hat{A}=۶۰^\circ$. الف) طول BC را به‌دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار sinB را پیدا کنید.



۲ــ دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟

نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha=\beta)$

۳ــ دستور محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به‌دست آورید.



۴ــ در شکل مقابل، اولاً طول BC را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.

۵ــ در شکل صفحه بعد AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبهٔ طول نیمساز زاویهٔ A به‌دست آورید.

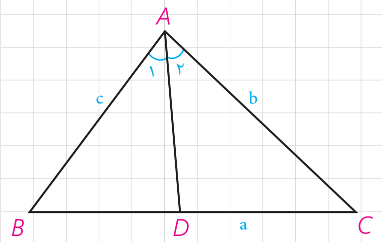
$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A=\frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots\times\sin\frac{A}{۲}+\frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots\times\sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow\ AB.AC.\sin A=AD.\sin\frac{A}{۲}(\cdots+\cdots)$$

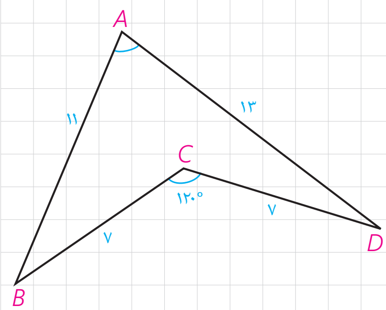
$$\Rightarrow\ AD=\frac{AB.AC.\sin A}{(\cdots+\cdots)\sin\frac{A}{۲}}=\frac{۲AB.AC.\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}{(\cdots+\cdots)\sin\frac{A}{۲}}$$

$$\Rightarrow AD=\cdots\cdots \ \Rightarrow\ (\text{نیمساز رأس } A)\ d_a=\frac{۲bc.\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$$



۶ــ در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصلهٔ ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟

راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.



۷ــ در شکل، اولاً اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.

راهنمایی: B را به D وصل کنید.

۸ــ ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

۹ــ به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A}>۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲>b^۲+c^۲$

ب) $\hat{A}<۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲<b^۲+c^۲$

پ) $\hat{A}=۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲=b^۲+c^۲$

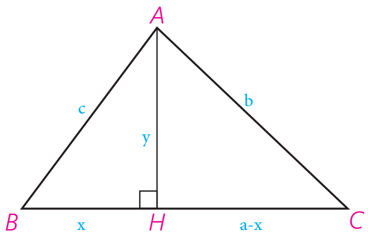
۱۰ــ به کمک نتیجهٔ تمرین ۹، حاده(تند)، قائمه یا منفرجه(باز) بودن زاویهٔ A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید :

الف) $AB=۱۰$, $AC=۶$, $BC=۹$

ب) $AB=۸$, $AC=۴$, $BC=۹$

پ) $AB=۸$, $AC=۱۵$, $BC=۱۷$

اثبات دستور هرون (برای محاسبهٔ مساحت مثلث)



در مثلث ABC، AB=c و AC=b و AH=y و BC=a و BH=x و CH=a−x. با نوشتن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH و تفاضل روابط به‌دست آمده خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ (a-x)^2+y^2=b^2 \end{cases} \Rightarrow b^2-c^2=(a-x)^2-x^2=a^2+x^2-2ax-x^2=a^2-2ax \Rightarrow x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a} \Rightarrow$$

$$y=\sqrt{c^2-x^2}=\sqrt{c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2}$$

با ساده کردن این عبارت جبری و تجزیهٔ آن به کمک اتحادهای جبری نتیجه می‌شود :

$$y=AH=\sqrt{\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}}=\frac{1}{2a}\sqrt{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}$$

$$=\frac{1}{2a}\sqrt{\left[(a+c)^2-b^2\right]\left[b^2-(a-c)^2\right]}=$$

$$\frac{1}{2a}\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}$$

حال با فرض a+b+c=۲p خواهیم داشت :

$a+c-b=a+c+b-2b=2p-2b=2(p-b)$

و به همین صورت :

$b+c-a=2(p-a)$, $b+a-c=2(p-c)$

و بنابراین :

$$AH=\frac{1}{2a}\sqrt{2p\times2(p-a)\times2(p-b)\times2(p-c)}=$$

$$\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad , \quad S=\frac{1}{2}AH.a=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

منــابع

ادوین إ، موئیز، هندسه مقدماتی از دیدگاه پیشرفته، ترجمه امیر خسروی و محمود نصیری (۱۳۷۷)، انتشارات مبتکران : تهران.

حاجی بابایی، جواد و همکاران، (۱۳۹۳)، کتاب درسی هندسه ۲ پایهٔ سوم ریاضی و فیزیک، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، چاپ هجدهم.

حسن‌زاده ماکویی، علی، طاهری، هوشنگ و فیروزنیا، احمد، (۱۳۷۱)، کتاب درسی مثلثات پایهٔ سوم ریاضی و فیزیک، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

خسروی،امیر، دارابی،ابراهیم و نصیری، محمود (۱۳۷۱)، کتاب درسی هندسه ۱، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

خسروی،امیر، دارابی،ابراهیم و نصیری، محمود (۱۳۷۱)، کتاب درسی هندسه ۲، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

گرینبرگ،ماروین. جی. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمه م.ه. شفیعیها، (۱۳۶۱)، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی : تهران.

گویا، زهرا و همکاران، (۱۳۹۳)، کتاب درسی هندسه ۱ پایهٔ دوم ریاضی و فیزیک، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، چاپ بیستم.

نصیری، محمود، (۱۳۹۴)، هندسه متوسطه مبانی و مفهوم‌ها، انتشارات مبتکران.

هاورد، ایوز، (۱۳۷۹). آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد اول)، ترجمه : محمدقاسم وحیدی اصل، تهران : مرکز نشر دانشگاهی، چاپ چهارم.

Byer, O., Lazebnik, F., & Smeltzer, D. L. (2010). Methods for Euclidean geometry. MAA.

Dodge, C. W. (2012). Euclidean geometry and transformational. Courier Corporation.

Hvidsten. M. (2005). Geometry with geometry explorer™. McGraw–Hill,

Kinsey, L. C., Moore. T. E., & Prassidis. S. (2011). Geometry & symmetry. John Wiley & Sons.

Libeskind, S. (2008). Euclidean and transformational geometry: A deductive inquiry. Jones & Bartlett Publishers.

Martin, G. E. (2012). The foundations of geometry and the non–Euclidean plane. Springer Science & Business Media.

O'Leary, M.L. (2010). Revolutins of Geometry (Vol. 87). John Wiley & Sons.

Posamentier. A. S. (1984). Excursions in advanced Euclidean geometry Addison – Wesley.

Tapp, K. (2011). Symmetry: a mathematical exploration. Springer Science & Business Media.

Umble, R. N., & Han, Z. (2014). Transformational Plane Geometry. CRC Press.

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی، دبیرخانهٔ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

کتاب هندسه ۲ با کد ۱۱۱۲۱۳

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	محمد نیازی	چهارمحال وبختیاری	۲۳	اکرم حبیب الهی	سمنان
۲	زهرا صیدی	ایلام	۲۴	مولود حاج رفیعی	قزوین
۳	لیلی دوستی	آذربایجان شرقی	۲۵	زهرا اصلانی	شهرستانهای تهران
۴	مرضیه خدایی	سمنان	۲۶	محمدسعیدحکیمی	کردستان
۵	ماریا عزیزی	ایلام	۲۷	میترا اسلماسی	خراسان شمالی
۶	نرگس اصلانی	آذربایجان شرقی	۲۸	علی خالقی	فارس
۷	عیسی دار	هرمزگان	۲۹	فاطمه محمدیها	شهرتهران
۸	کیانوش کمانی	مرکزی	۳۰	معصومه موذن زاده	هرمزگان
۹	جمال نوین	یزد	۳۱	علی نصیری	قزوین
۱۰	نسرین رنجبران	همدان	۳۲	کمیل ایزدپناه	گلستان
۱۱	شهریار ساکنیان دهکردی	چهارمحال وبختیاری	۳۳	معصومه سمیع انارستانی	گیلان
۱۲	حمیدرضامومنی	کرمان	۳۴	یوسف کرمی	اردبیل
۱۳	معصومه عرب پور داهوئی	کرمان	۳۵	راضیه کاظمی	خراسان جنوبی
۱۴	علی مراد سبزه کار	خراسان جنوبی	۳۶	فرخ حسن زاده	کهگیلویه‌وبویراحمد
۱۵	قاسم شعبانی چااوسر	مازندران	۳۷	محمد نبرد رحمانی	کردستان
۱۶	ایرج پویا	آذربایجان غربی	۳۸	جابر عامری	خوزستان
۱۷	قباد خالدی کوره	آذربایجان غربی	۳۹	لیلا محرابی نسب	خراسان شمالی
۱۸	نسرین دخت نجیبی	فارس	۴۰	مسعودمنعمی	مازندران
۱۹	شیرین جهانگیری	کرمانشاه	۴۱	کبری پور قبادی	لرستان
۲۰	سیما حقیقی اذر	گلستان	۴۲	بهرام وره نوی	اردبیل
۲۱	محسن حجابی	شهرتهران	۴۳	حامد رنجبر کهخا	سیستان‌وبلوچستان
۲۲	شهناز مترجم	کرمانشاه			

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۸۷۴-گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (Email)

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب های درسی عمومی و متوسطه نظری